Université Abdelmalek Essaâdi | **Année universitaire : 2018/2019**
Faculté des Sciences de Tétouan | **S.M.A. Semestre 6**
Département de Mathématiques | **Contrôle de Probabilités 2**

Corrigés

Exercice 1 :

I.-

1. L'espéarnce mathématique de la variable aléatoire $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ est :

$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$E(X) = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$

$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$

Donc $\boxed{E(X) = \lambda}$

La variance de la variable aléatoire X est :

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

On calcul d'abord $E(X^2)$.

$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$E(X^2) = e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda$

$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda$

$= \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$

$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Donc $\boxed{Var(X) = \lambda}$

2. La fonction caractéristique de la variable aléatoire $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ est :

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= E(e^{itX}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\exp(\lambda e^{it}) \\
&= \exp(\lambda(e^{it}-1)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1)}$

$\star$ $\varphi'_X(t) = \lambda i e^{it}\exp(\lambda(e^{it}-1))$
$\varphi'_X(0) = \lambda i \Rightarrow E(X) = \frac{1}{i}\varphi'_X(0) = \lambda$
$\star$ $\varphi''_X(t) = \lambda i^2 e^{it}\exp(\lambda(e^{it}-1)) + (\lambda i e^{it})^2\exp(\lambda(e^{it}-1))$
$\varphi''_X(0) = \lambda i^2 + \lambda^2 i^2 \Rightarrow E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''_X(0) = \lambda + \lambda^2$
Donc $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$

II.- $Y = X_1 + X_2$

1. $\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(X_1+X_2)})$
   $= E(e^{itX_1}.e^{itX_2}) = E(e^{itX_1}).E(e^{itX_2})$ (car X_1 et X_2 sont indépendantes).
   $= \varphi_{X_1}(t).\varphi_{X_2}(t) = \exp(\lambda_1(e^{it}-1)).\exp(\lambda_2(e^{it}-1))$
   Donc $\boxed{\varphi_Y(t) = \exp((\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1))}$
   D'où $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$
2. Soit $n, m \in \mathbb{Z}^+$ avec $m < n$, on a :

$$\begin{aligned}
P(X_1 = m/Y = n) &= P(X_1 = m/X_1 + X_2 = n)\\
&= \frac{P(X_1 = m, X_1 + X_2 = n)}{P(Y = n)}\\
&= \frac{P(X_1 = m, X_2 = n-m)}{P(Y = n)}\\
&= \frac{P(X_1 = m).P(X_2 = n-m)}{P(Y = n)}\text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indép.)}\\
&= \frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_1^{n-m}}{(n-m)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}} = \frac{n!\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!(\lambda_1+\lambda_2)^n}\\
&= C_n^m\frac{\lambda_1^m}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}\frac{\lambda_2^{n-m}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n-m}}\\
&= C_n^m\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m};m = 0,1,2,\cdots,n
\end{aligned}$$

   Donc la loi conditionnelle de X_1 par Y est binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda_1}{\lambda 1+\lambda_2}$.

Exercice 2 :

1. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t)dt$
   donc, pour $x \geqslant 0$
   $F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$
   D'où
   $$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geqslant 0\\ 0 & \text{pour } x < 0\end{cases}$$
   et
   $$R_X(x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geqslant 0\\ 1 & \text{pour } x < 0\end{cases}$$
2. $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)dx$
   $= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$
   $$\left(\text{par parties } \begin{array}{ll} u = x, & u' = 1\\ v' = \lambda e^{-\lambda x}, & v = -e^{-\lambda x}\end{array}\right)$$

$E(X) = 0 + \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty}$

D'où $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$E(X^2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)dx$

$\quad = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx = \underbrace{[-x^2 e^{-\lambda x}]_0^{+\infty}}_{=0} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx$

$\left(\text{par parties } \begin{array}{ll} u = x^2, & u' = 2x \\ v' = \lambda e^{-\lambda x}, & v = -e^{-\lambda x} \end{array}\right)$

$E(X^2) = 2\left(\underbrace{\left[\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx\right) \left(\text{par parties } \begin{array}{ll} u = x, & u' = 1 \\ v' = e^{-\lambda x}, & v = \frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda} \end{array}\right)$

$E(X^2) = 2\left(\frac{1}{\lambda}\left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty}\right) = \frac{2}{\lambda^2}$

$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

3. $M_X(t) = E(e^{tX}) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$

$\quad = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{tx} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{tx} e^{-\lambda x}dx$

$\quad = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x}dx = \lambda \left[\frac{e^{(t-\lambda)x}}{t-\lambda}\right]_0^{+\infty}$

Donc, si $t - \lambda < 0$ ou $t < \lambda$, $\quad M_X(t) = -\dfrac{\lambda}{t-\lambda} = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$

4. $M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} E(X^k)\frac{t^k}{k!}$

et, on sait que $\quad \dfrac{\lambda}{\lambda - t} = \dfrac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\lambda^k}$ puisque $\dfrac{t}{\lambda} < 1$

par identification $\quad E(X^k) = \dfrac{k!}{\lambda^k}$ pour $\dfrac{t}{\lambda} < 1$

on retrouve $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $E(X^2) = \dfrac{2}{\lambda^2}$

d'où $Var(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$

5. **Absence de mémoire :**

$$P(X > x + u / X > x) = \frac{P(X > x + u, X > x)}{P(X > x)}$$
$$= \frac{P(X > x + u)}{P(X > x)} = \frac{R_X(x + u)}{R_X(u)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(x+u)}}{e^{-\lambda u}} = e^{-\lambda x} = P(X > x)$$

Réciproquement,

Soit X une v.a. absolument continue qui n'a pas de mémoire. Cherchons R_X sa fonction de survie.

On a : $\dfrac{R_X(x+u)}{R_X(u)} = R_X(x)$ où $x \geqslant 0, u \geqslant 0$
C'est-à-dire $R_X(x+u) = R_X(x).R_X(u)$
ou encore $\ln R_X(x+u) = \ln R_X(x) + \ln R_X(u)$
Comme R_X est décroissante et continue à droite, alors il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\ln R_X(x) = -\lambda x$$

Par conséquent, $R_X(x) = e^{-\lambda x}$, pour $x \geqslant 0$.
Donc $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$.

6. Par récurrence, pour $n = 2$, $S_2 = X_1 + X_2$, comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on a :

$$f_{S_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(t) f_{X_2}(x-t)dt$$

où f_{X_1} et f_{X_2} sont toutes les deux celles de la loi exponentielle de paramètre λ. On a, alors, pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f_{S_2}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t) \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x-t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,+\infty[\cap]-\infty,x]}(t)dt \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{[0,x[}(t)dt \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda x} x = g_2(x), \text{ pour } x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Pour le rang n, $S_n = S_{n-1} + X_n$ et on suppose que la loi de S_{n-1} est

$$g_{n-1}(x) = \frac{\lambda^{n-1} x^{n-2} e^{-\lambda x}}{(n-2)!}.$$

Comme les variables aléatoires S_{n-1} et X_n sont indépendantes, la densité de S_n est, donc, pour $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} f_{S_n}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1} t^{n-2} e^{-\lambda t}}{(n-2)!} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(t) \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(x-t)dt \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n-2} e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0,x]}(t)dt \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \left[\frac{t^{n-1}}{n-1} \right]_0^x, \text{ pour } x \geqslant 0 \\ &= \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} = g_n(x), \text{ pour } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

La loi de S_n est, donc, bien celle d'Erlang d'ordre n