Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2018/2019
S.M.A.
Semestre 6

Rattrapage de Probabilités 2

Durée: 1h30min

Exercice 1 : (12 points)
On considère une variable aléatoire discrète X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p que l'on note $X \sim \mathcal{B}(n,p)$:

$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}; \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

1. Soit la variable aléatoire $Y = n - X$. Quelle est la loi de Y ?
2. Montrer que la loi binomiale vérifie la relation $P(X=k) = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} P(X=k-1)$ et retrouver $P(X=k)$ par récurrence.
3. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de X par la méthode directe.
4. Retrouver l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de X en considérant que $X = \sum_{i=1}^n X_i$ avec les $X_i; i = 1, 2, \cdots, n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p.
5. Calculer la fonction caractéristique de X (par la méthode directe) et retrouver $E(X)$ et $Var(X)$.
6. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$.
   (a) Déterminer la loi de leur somme $X_1 + X_2$.
   (b) Soient α et β deux entiers tels que $\alpha \leqslant \beta$. Calculer la probabilité conditionnelle $P(X_1 = \alpha / X_1 + X_2 = \beta)$.

Exercice 2 : (8 points)
On considère une variable aléatoire U de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
On écrit $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.

1. Montrer que U et $1-U$ suivent la même loi.
2. Quelle est la loi suivie par $V = -\ln(U)$ et $W = -\ln(1-U)$?
3. Montrer que $R = \sqrt{-\ln(U)}$ suit une loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ de paramètre α à déterminer. On rappelle qu'une variable aléatoire R suit une loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ si sa densité est de la forme :
$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \text{pour} \quad r > 0$$
(Indication : Dans les questions 1, 2 et 3, penser à utiliser les fonctions de répartition)
4. Soient les variables aléatoires $X = R\cos\theta$ et $Y = R\sin\theta$ où les variables aléatoires $R \sim \mathcal{R}(\alpha)$ et $\theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi[)$ sont indépendantes.
   (a) Calculer la loi conjointe de (X, Y).
   (b) Donner les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Barème : Chaque question est notée sur 2 points.

Bonne Chance !