Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2010/2011

SMA. SMI. S_3

Série 2 Probabilités.

Exercice 1: Une réunion rassemble 20 personnes: 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% de femmes et 40% d'hommes fument.

(i) Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer?

(ii) Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme?

Exercice 2: Le quart d'une population est vacciné contre une maladie. Parmi les malades, il y a un vacciné pour quatre non vaccinés. Parmi les vaccinés, il y a un malade sur douze. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un non vacciné?

Exercice 3: On lance trois fois successives, de façon indépendante, une pièce de monnaie symétrique. On gagne 2 DH pour chaque Face obtenue et on perd 1 DH pour chaque Pile obtenue. On note X la variable aléatoire donnant les différents gains obtenus possibles.

(i) Chercher la loi de probabilité de X.

(ii) Chercher la fonction de répartition F de X et construire son graphe.

(iii) Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

Exercice 4: Un joueur a une chance sur trois de gagner une partie. Il joue cinq parties.

(i) Calculer la probabilité de chacun de ces événements:

a) Le joueur gagne trois parties;

b) Il gagne cinq parties;

c) Il gagne au plus une partie;

d) Il gagne au moins deux parties.

(ii) Chercher le nombre moyen de parties gagnées.

Exercice 5: Dans une compagnie d'assurances, on reçoit en moyenne cinq réclamations par jour. On suppose que le nombre de réclamation par jour est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson.

(i) Quelle est la probabilité que le nombre de réclamations soit inférieur à 3?

(ii) Quelle est la probabilité que le nombre de réclamations reçues au cours d'une semaine soit inférieur ou égal à 4?

(iii) Quelle est la probabilité que la compagnie reçoive 4 réclamations par jour, exactement 3 fois au cours des 5 prochains jours?

Exercice 6: Anas tire sur une cible avecla probabilité $p \in]0,1[$ d'atteindre cette cible. Il tire n fois de suite sur cette cible. Un compteur comptabilise le nombre de fois où la cible a été atteinte au cours des n tirs. Malheureusement, le compteur est détraqué: il affiche le bon résultat avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et le bon résultat plus un avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Soit X la v.a. égale au nombre de fois où Anas atteint la cible au cours des n tirs. Soit Y la v.a. égale au nombre affiché par le compteur.

(i) Chercher la loi de X.

(i) Déterminer la loi de Y.

(iii) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 7: Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \frac{4}{n}P(X = n-1)$. Déterminer la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8: Soient X et Y deux v.a. telles que $Y = X^2$. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant:

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

(i) Déterminer la loi de Y.

(ii) Déterminer la loi conjointe de X et Y et la loi marginale de Y.

(iii) Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes?

EX 9 Soient X et Y 2 v.a. indépendantes de lois resp de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. 1) Donner la loi de $X+Y$

2) Donner la loi de $X / _{X+Y=n}$

EX 10 Calculer $E(u^X)$; $|u|<1$ pour:

i) $X \sim \mathcal{B}(p)$ ii) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 11: Pour un projet de construction d'un immeuble de 10 logements, on étudie la capacité nécessaire du parking. Pour $i = 1, ..., 10$, on note X_i la variable "Nombre de voitures du ménage résidant à l'appartement numéro i" . Pour tout ménage, on admet que la probabilité d'avoir une voiture est 0,70 et celle d'avoir deux voitures est de 0,30 (on néglige toute autre possibilité). On suppose que les variables $X_1, ..., X_{10}$ sont indépendantes.

1) Pour $i = 1, ..., 10$, on pose $Y_i = X_i - 1$. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_i?

2) Quelle est la loi de probabilité de la variable somme $S = Y_1 + \cdots + Y_{10}$? Justifier votre réponse.

3) Calculer la probabilité qu'un parking de 19 places soit suffisant pour les 10 ménages.

Exercice 12 : On suppose que les salaires des ouvriers d'une certaine entreprise sont répartis d'une manière uniforme entre 2500 DH et 4500 DH par mois.

1) Quelle est la probabilité qu'un ouvrier choisi au hasard reçoive un salaire compris entre 2800 DH et 4200 DH?

2) Quel est le salaire moyen d'un ouvrier dans cette entreprise?

Exercice 13 : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de densité $f(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1) Déterminer la constante c.

2) Chercher la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X - 1$.

3) Donner $E(Y)$ et $V(Y)$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 14: Partie A: On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0, 1]$ et on définit la variable aléatoire $Y = 4X + 3$.

1) Chercher la densité de probabilité de Y.

2) Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Partie B: Soit X une v.a.r. continue de loi uniforme sur $[0, 1[$ et $\lambda > 0$, un réel.

Déterminer la loi de probabilité de $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$ et donner $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 15: La densité de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Chercher la fonction de répartition F_X.

2) Calculer $E(\frac{1}{X})$.

3) On pose $Y = \ln(1 + X)$. Chercher la densité de probabilité de Y.