Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Departement de Mathématiques

Année Universitaire : 2018-2019
S.M.A
S.M.I S_3

Corrigés de la série n° 1 des T.D. de Probabilités

Ex. 1 :

Soit P la probabilité que le renard soit tué.
Soit $\overline{P}$ la probabilité pour que le renard ne soit tué par aucun des trois chasseurs.

$$P = 1 - \overline{P}$$

$$\overline{P} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \quad (\text{grâce à l'indépendance})$$

$$P = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}.$$

2ème méthode :

Soit X la v.a. représentant le nombre de chasseurs qui ont tué le renard.

$$X \sim B(n, p) \quad \text{avec} \quad n = 3 \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{4}$$

$$P = P(X \geq 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 + C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 + C_3^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$= \frac{27}{64} + \frac{9}{64} + \frac{1}{64} = \frac{37}{64}$$

3ème méthode : On énumère toutes les possibilités.

Soit A_i l'évènement « le chasseur numéro i tue le renard » ; $P = P(E)$, avec

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$E_1 = (A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3)$$

$$E_2 = (A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) \cup (\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3)$$

$$E_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

$$P = P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$$
$$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3)$$
$$- P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Ex. 2 :

1) $E_1 = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = A \cap (\overline{B \cup C})$

$E_2 = A \cap (B \cup C)$

$E_1 \cap E_2 = A \cap (\overline{B \cup C}) \cap (B \cup C)$
$= A \cap \phi = \phi$

D'où E_1 et E_2 sont des évènements incompatibles.

2) $E_1 \cup E_2 = [A \cap (\overline{B \cup C})] \cup [A \cap (B \cup C)]$
$= A \cap [(\overline{B \cup C}) \cup (B \cup C)]$
$= A \cap \Omega = A$

3) $P(E_1 \cup E_2) = P(A)$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$
$$= P(E_1) + P(E_2) - P(\emptyset)$$
$$= P(E_1) + P(E_2)$$

Donc $P(E_1) = P(A) - P(E_2)$

$$P(E_2) = P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C))$$
$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$
$$= 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4$$

$$P(E_1) = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3$$

Ex. 3 :

$A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$

1) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$

2) $A \cap B \cap C$

3) $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$

4) $A \cup B \cup C$

5) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Ex. 4 :

Soit un dé équilibré et on s'intéresse à l'évènement

$A = \{$obtenir au moins un as, en jettant n fois ce dé$\}$

Quelle condition doit remplir n pour que l'on ait

$$P(A) > 0{,}9$$

En jettant une fois un dé, la probabilité d'obtenir un as est $\frac{1}{6}$

Donc la probabilité de ne pas obtenir un as en un jet est

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

On en déduit que $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$

la condition $P(A) > 0,9$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < 0,1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^n > 10$$

$$\Leftrightarrow n(\ln 6 - \ln 5) > \ln 10$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln 10}{\ln 6 - \ln 5} = 12,629$$

n doit être entier, on a donc

$P(A) > 0,9$ si $n \geqslant 13$

Autrement dit $P(A)$ reste inférieure à 0,9 jusqu'à $n = 12$ jets du dé !

1) On considère l'éventualité $\omega_j = \{$le premier 6 est apparu au $j^{\text{ème}}$ lancer$\}$

On considère l'événement $E_j = \{$on obtient un 6 au $j^{\text{ème}}$ lancer$\}$ avec $j \in \mathbb{N}^*$

$$P(E_j) = \frac{1}{6}$$

$$P(\omega_j) = P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \dots \cap \overline{E}_{j-1} \cap E_j)$$

$$= P(\overline{E}_1)\, P(\overline{E}_2) \dots P(\overline{E}_{j-1})\, P(E_j)$$ (car les lancers successifs sont indépendants)

$$P(\omega_j) = \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^{j-1}}{6^j}$$

2) $$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} P(\omega_j) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \dots + \frac{5^{j-1}}{6^j} + \dots$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} P(\omega_j) = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{5}{6} + \dots + \frac{5^{j-1}}{6^{j-1}} + \dots\right]$$

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} P(\omega_j) = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1 - \frac{5}{6}}\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{1} = 1$$

3) $$P(A) = P\left(\sum_{j \in \mathbb{N}^*} \omega_{2j}\right) = \frac{5}{6^2} + \frac{5^3}{6^4} + \dots + \frac{5^{2k-1}}{6^{2k}} + \dots$$

$$P(A) = \frac{5}{6^2}\left[1 + \frac{5^2}{6^2} + \dots + \frac{5^{2k-2}}{6^{2k-2}} + \dots\right]$$

$$P(A) = \frac{5}{6^2}\left[\frac{1}{1 - \frac{5^2}{6^2}}\right] = \frac{5}{6^2}\,\frac{6^2}{6^2 - 5^2} = \frac{5}{11}$$

4) $$P(B) = P\left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \omega_j\right) = \sum_{j=k+1}^{\infty} P(\omega_j) = \frac{5^k}{6^{k+1}} + \frac{5^{k+1}}{6^{k+2}} + \dots + \frac{5^{k+n-1}}{6^{k+n}} + \dots$$

$$P(B) = \frac{5^k}{6^{k+1}}\left[1 + \frac{5}{6} + \dots + \frac{5^{n-1}}{6^{n-1}} + \dots\right] = \frac{5^k}{6^{k+1}}\left[\frac{1}{1 - \frac{5}{6}}\right] = \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

$$P(\omega_j / B) = \frac{P(\omega_j \cap B)}{P(B)}$$

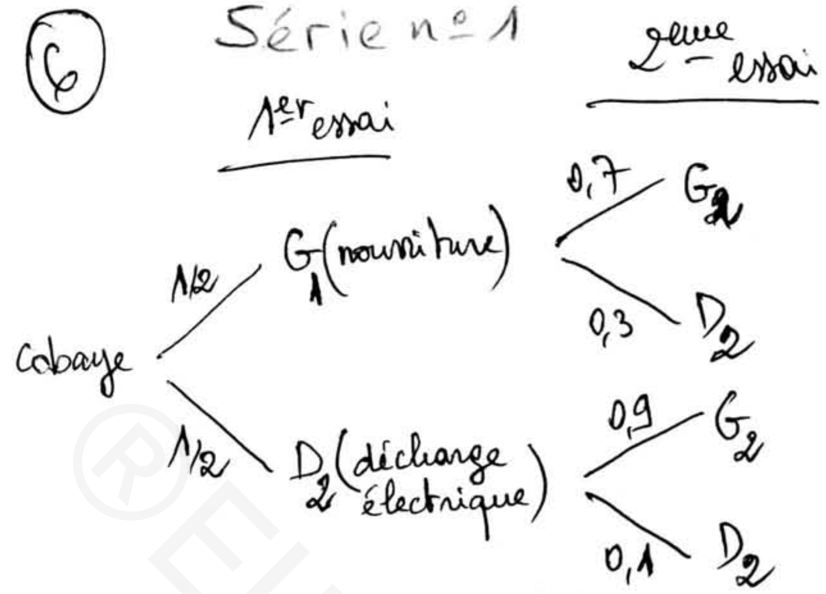
Si $j \leq k$, $\{\omega_j\} \cap B = \emptyset$ et donc $P(\omega_j / B) = 0$

Si $j > k$; $\{\omega_j\} \cap B = \{\omega_j\}$ et donc $P(\omega_j / B) = \frac{P(\omega_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\omega_j)}{P(B)}$

$$= \frac{5^{j-1}}{6^j} \times \left(\frac{6}{5}\right)^k$$

d'où $P(\omega_j / B) = \frac{5^{j-k-1}}{6^{j-k}}$

6 Série n°1



On considère les événements
G_i = aller à gauche à l'essai i
et
D_i = aller à droite à l'essai i

On a, par hypothèse :
$P(G_{i+1}/G_i) = 0{,}7$ et $P(D_{i+1}/G_i) = 0{,}3$
$P(G_{i+1}/D_i) = 0{,}9$ et $P(D_{i+1}/D_i) = 0{,}1$

$P(G_i)$? $P(D_i)$?
$P(G_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ $P(D_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$

1) $P(G_2) = P_1$ = probabilité de tourner à gauche au second essai

$$= P(G/\text{nourriture})\,P(\text{nourr}) + P(G/\text{Décharge électrique})\,P(\text{Décharge élec})$$
$$= P(G_2/G_1)\,.\,P(G_1) + P(G_2/D_1)\,.\,P(D_1) \quad \text{Prob. totale}$$
$$= 0{,}7\,.\,0{,}5 + 0{,}9\,.\,0{,}5$$
$$= 0{,}8 \Rightarrow P(D_2) = 0{,}2$$

2) $P_2 = P(D_1/G_2)$?

$$P(D_1/G_2) = \frac{P(D_1 \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_2/D_1)\,.\,P(D_1)}{0{,}8} = \frac{0{,}9\,.\,0{,}5}{0{,}8}$$
$$= \frac{45}{80} = 0{,}56$$

3) $P_3 = P(G_3) = P(G_3/D_2)\,P(D_2) + P(G_3/G_2)\,P(G_2)$

$$= 0{,}9\,.\,0{,}2 + 0{,}7\,.\,0{,}8$$
$$= 0{,}74 \Rightarrow P(D_3) = 1 - 0{,}74 = 0{,}26$$