T. D. de Probabilités 2018 – 2019

Série n° 4 (corrigés)

Ex. 2 :

k ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \iff \int_0^3 k(3-x)\,dx = 1$$

$$\iff k\left(3\int_0^3 dx - \int_0^3 x\,dx\right) = 1$$

$$\iff k\left(3\times 3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3\right) = 1$$

$$\iff k\left(9 - \frac{9}{2}\right) = 1 \iff k\times\frac{9}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{2}{9}}$$

$E(X)$?

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x(3-x)\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 (3x - x^2)\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\left(3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3\right) = \frac{2}{9}\left(3\left(\frac{9}{2}\right) - \left(\frac{27}{3}\right)\right)$$

$$E(X) = 3 - 2 = 1$$

$Var(X)$?

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2(3-x)\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\left(\int_0^3 3x^2\,dx - \int_0^3 x^3\,dx\right) = \frac{2}{9}\left(3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^3\right)$$

2/

$$E(X^2) = \frac{2}{9}\left(3(9) - \frac{81}{4}\right) = 6 - \frac{9}{2} = 1{,}5$$

$$Var(X) = 6 - \frac{9}{2} - 1 = 5 - \frac{9}{2} = 5 - 4{,}5 = 0{,}5$$

Fonction de répartition?

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

si $x < 0$; $F(x) = 0$

si $0 \leq x \leq 3$; $F(x) = \frac{2}{9}\int_{0}^{x} (3-t)\,dt = \frac{2}{9}\left(3x - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\right)$

$$= \frac{2}{3}x - \frac{x^2}{9} = \frac{6x - x^2}{9}$$

$$F(x) = \frac{x(6-x)}{9}$$

si $x \geq 3$; $F(x) = 1$

donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x(6-x)}{9} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

3/ Ex.3:

, $f(x) \geq 0$ pour $x \in [0,1]$; $f(x) = 0$ sinon

$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

, $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{1/2} f(x)\,dx = 2\int_0^{1/2} x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2}$

$= 2\left(\frac{1/4}{\cancel{2}}\right) = \frac{1}{4}$

, $P\left(X \leq 1/2 \,/\, \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \dfrac{P\left(X \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)}{P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)}$

$= \dfrac{P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} = \dfrac{\int_{1/3}^{1/2} f(x)\,dx}{\int_{1/3}^{2/3} f(x)\,dx}$

$= \dfrac{\cancel{2}\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_{1/3}^{1/2}}{\cancel{2}\left[\frac{x^2}{\cancel{2}}\right]_{1/3}^{2/3}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = \dfrac{\frac{9-4}{36}}{\frac{3}{9}}$

$= \dfrac{\frac{5}{\cancel{9} \times 4}}{\frac{3}{\cancel{9}}} = \dfrac{5}{4 \times 3} = \dfrac{5}{12}$

, $F(x)$?

$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$= \int_0^x f(t)\,dt$

si $x \leq 0$; $F(x) = 0$

si $0 < x < 1$; $F(x) = 2\int_0^x t\,dt = \cancel{2}\left[\frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_0^x = x^2$

si $x \geq 1$; $F(x) = 1$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

4/ $$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$= 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9}$$

$$= \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$$

Ex. 4

deux dés : D_1 équilibré

$D_2 \to$ face 6 avec une proba. 0,5
$\quad\ \to$ les autres faces avec la m̂ proba.

$\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$F_i = \{\text{obtenir la face } i\}$; $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$

1°) On a :

$F_1 + F_2 + \dots + F_5 + F_6 = 1$

alors $F_1 + \dots + F_5 = 1 - F_6 = 1 - 0,5 = 0,5 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 5 F_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow F_i = \frac{1}{10}$; $i = 1, \dots, 5$

2°)

$$P(F_1) = P(F_1/D_1) \cdot P(D_1) + P(F_1/D_2) \cdot P(D_2)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$$

$$= \frac{5 + 3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

3°)

$$P(F_6) = P(F_6/D_1) \cdot P(D_1) + P(F_6/D_2) \cdot P(D_2)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1 + 3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4°) $P(D_2/F_6)$? Bayes

$$P(D_2/F_6) = \frac{P(F_6/D_2) \cdot P(D_2)}{P(F_6/D_1) \cdot P(D_1) + P(F_6/D_2) P(D_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1/4}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$$

5°) $P(D_1/F_1)$? Bayes

$$P(D_1/F_1) = \frac{P(F_1/D_1) \cdot P(D_1)}{P(F_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{15}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{15}{2} = \frac{15}{24}$$

Ex.5 :

taux d'ampoules défectueuses: $5\% \to A$ (0,05) ; $10\% \to B$ (0,1)

commandes d'ampoules: $40\% \to A$ (0,4) ; $60\% \to B$ (0,6)

1°) soit D l'évènement « ampoule choisie défectueuse »

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B).$$

$$= 0{,}05 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}6$$

$$= 0{,}02 + 0{,}06 = 0{,}08$$

2°) $P(A/D) = ?$ Bayes

$$P(A/D) = \frac{P(D/A) \cdot P(A)}{P(D)}$$

$$= \frac{0{,}05 \times 0{,}4}{0{,}08} = \frac{0{,}02}{0{,}08} = 0{,}25$$

Ex. 7

X v.a continue de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a)

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

si $x < 0$ alors $F(x) = 0$

si $x \geq 0$ alors $F(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$

$$F(x) = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

donc

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) La propriété d'absence de mémoire : Soient $s, t \geq 0$

$$P(X > s+t \,/\, X > t) = \frac{P(X > s+t \text{ et } X > t)}{P(X > t)}$$

$$= \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} = \frac{1 - P(X \leq s+t)}{1 - P(X \leq t)}$$

$$= \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(t)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(s+t-t)}$$

$$= e^{-\lambda s} = 1 - F(s) = P(X > s)$$

Ex. 8 :

Soit X v.a. représentant ce poids.

$$X \sim \mathcal{N}(\underset{\overline{X}=E(X)}{\underset{\parallel}{65\,Kg}}, \underset{Var(X)=\sigma_X^2}{\underset{\parallel}{36\,(Kg)^2}})$$

a) $P(X > 68\,Kg) = P\left(\frac{X-65}{\sqrt{36}} > \frac{68-65}{\sqrt{36}}\right)$

$= P(T > 0{,}5) = 1 - F(0{,}5)$

$= 1 - 0{,}6915$

$= 0{,}3085$

avec T une v.a. centrée réduite $T \sim N(0,1)$

F sa fonction de répartition lue sur une table statistique.

Il y a 30,85 % de personnes qui ont un poids supérieur à 68 kg

b)* $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2)$

$= 1 - P(Y=0) - P(Y=1)$

$= 1 - C_4^0 (0{,}3085)^0 \times (1-0{,}3085)^{4-0} - C_4^1 (0{,}3085) \times (1-0{,}3085)^3$

$= 1 - (0{,}6915)^4 - 4 \times (0{,}3085)(0{,}6915)^3$

$= 1 - 0{,}23 - 4 \times 0{,}13$

$= 0{,}25$

Y était v.a. qui représente les personnes qui ont un poids supérieur à 68 parmi 4.

$Y \sim B(n=4, p=0{,}3085)$