Contrôle de rattrapage de Probabilité

SMA S_3

I Le salaire (en dhs) des employés d'une entreprise est donné dans le tableau suivant.

Salaire	effectif
[4000, 4500[	11
[4500, 5000[	25
[5000, 5500[	35
[5500, 6000[	19
[6000, 6500[	7
[6500, 7000[	3

1) Construire la courbe des fréquences cumulées
2) Déterminer la médiane.
3) Déterminer le salaire moyen et la variance
4) Quel est le pourcentage des employés qui ont un salaire inferieur 5000 dhs

5) Le directeur de l'entreprise veut augmenter les salaires afin d'avoir un salaire moyen de 6000 dhs et un écart type de 657. On note x l'ancien salaire et y le nouveau. Le directeur utilise la transformation $y = ax + b$ $a > 0$. Déterminer a et b.

II Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable X.
2) Determiner la fonction de répartition de X.
3) Calculer $E(X)$
4) On pose $Y = 2X + 1$. Donner la densité de Y.

(III) Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et sautant

ou bien une seule marche avec probabilité p.

ou bien deux marches avec probabilité $1-p$.

On suppose les sauts indépendants les uns des autres.

1) On observe n sauts de la grenouille et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies.

a) Quelle est la loi de X_n ?

b) Exprimer Y_n en fonction de X_n et donner $E(Y_n)$.

2) Pour $k \geq 1$, on pose p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k.

i) Calculer p_1 et p_2

ii) Donner une relation entre p_k et p_{k-1}

(indication : On note M_k "la grenouille passe par la Marche k"

et D "la grenouille fait un saut de 2 marche".

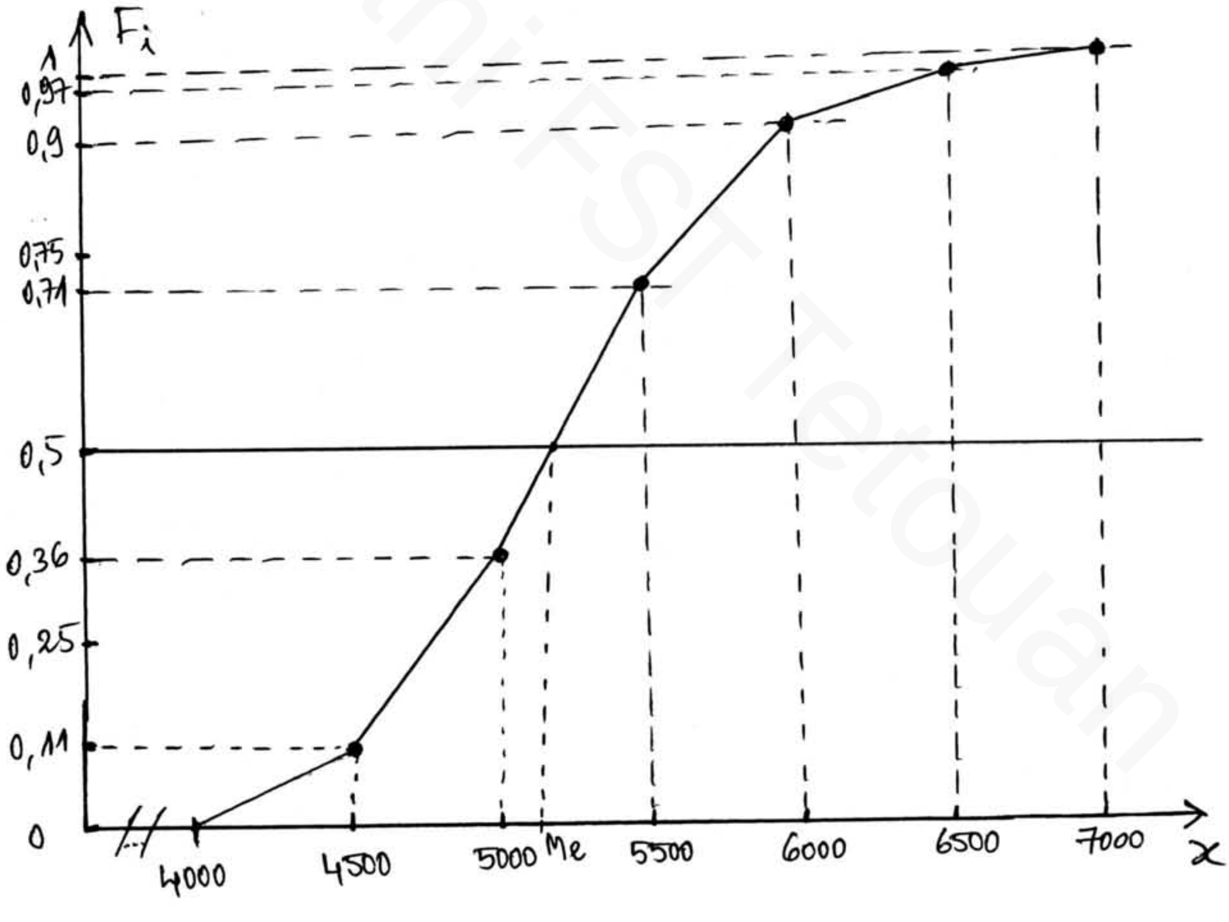
Calculer $P(M_{k-1} \cap D)$

Barème : EX1 7 pts EX2 5 pts EX3 8 pts

Correction du rattrapage de Proba-Stat. S_3

$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	f_i	F_i	c_i	$f_i c_i$	$(c_i - \overline{X})^2$	$f_i (c_i - \overline{X})^2$
[4000, 4500[	11	0,11	0,11	4250	467,5	950 625	104568,75
[4500, 5000[	25	0,25	0,36	4750	1187,5	225 625	56406,25
[5000, 5500[	35	0,35	0,71	5250	1837,5	625	218,75
[5500, 6000[	19	0,19	0,9	5750	1092,5	275 625	52368,75
[6000, 6500[	7	0,07	0,97	6250	437,5	1050625	73543,75
[6500, 7000[	3	0,03	1	6750	202,5	2325625	69768,75
	100	1			5225		356875

1°) Courbe des fréquences cumulées croissantes :



2) Médiane par le calcul :

$$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

On cherche la valeur 0,5 par les $f_i cc$

On ne la trouve pas exactement parmi les $f_i cc$. On cherche la 1ère valeur qui dépasse 0,5. C'est 0,71 ; alors la classe $[5000, 5500[$ est la classe qui contient la médiane.

On applique la formule :

$$Mé = l_{i-1} + \frac{\frac{N}{2} - n_{i-1}cc}{n_i} a_i$$

$$Mé = 5000 + \frac{50 - 36}{35} \times 500 =$$

$$= 5000 + 0{,}4 \times 500$$

$$\boxed{Mé = 5200}$$

3) Le salaire moyen :

$$\bar{X} = \sum_i f_i c_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1} n_i c_i = 5225$$

Variance :

$$* \quad Var(X) = \sum_i (c_i - \bar{X})^2 f_i = 356875$$

$$* \quad Var(X) = \sum_i f_i c_i^2 - \bar{X}^2 = 27\,657\,500 - 27\,300\,625$$

$$= 356\,875$$

c_i^2	$f_i c_i^2$
18 062 500	1986875
22 562 500	5640 625
27 562 500	9 646 875
33 062 500	6281875
39 062 500	2734375
45562500	1366 875
	27 657 500

4) le pourcentage des employés qui ont un salaire inférieur à 5000 dhs est $0,36 \times 100 = 36\%$

5) $Y = aX + b$

$$\Rightarrow \bar{Y} = a\bar{X} + b$$

$$Var(y) = a^2 Var(x) \Rightarrow \sigma_y = |a|\,\sigma_x$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{657}{\sqrt{356\,875}} = \frac{657}{597,39}$$

$$\Rightarrow \boxed{a \simeq 1,1}$$

et $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 6000 - 1,1 \times 5225 = 6000 - 5747,5$

$$\boxed{b = 252,5}$$

II

$$f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

1°) , $f(x) \geq 0$

, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$

$\displaystyle = \int_{-\infty}^{0} e^t\,dt = \left[e^t\right]_{-\infty}^{0}$

$= 1$

2°) $\displaystyle F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

si $x < 0$; $\displaystyle F(x) = \left[e^t\right]_{-\infty}^{x} = e^x$

si $x \geq 0$; $\displaystyle F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 1$

$$F(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

3°) $\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x e^x\,dx$

par parties $\left.\begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \end{cases}$

$$E(X) = \left[x e^x\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = -\left[e^x\right]_{-\infty}^{0} = -1$$

4°) $Y = 2X + 1 \iff Y = \varphi(X)$

$\iff X = \varphi^{-1}(Y)$

φ est st $\nearrow$

$\varphi^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow (\varphi^{-1}(y))' = \dfrac{1}{2}$

$$f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\,(\varphi^{-1}(y))'$$

$$= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{y-1}{2}} & \text{si } y < 1 \\ 0 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

III 1) $P(X_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$; $k = 1, 2, 3, \dots, n$

a) $X_n \sim B(n, p)$

b)

$$n \text{ sauts} \begin{cases} \to X_n \text{ fois 1 marche} \\ \to n - X_n \text{ fois 2 marches} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_n = X_n + 2(n - X_n)$$
$$= 2n - X_n$$

$$E(Y_n) = 2n - E(X_n)$$
$$= 2n - np = n(2-p)$$

2) i) $p_1 = P(M_1) = p$

$$p_2 = P(M_2) = 1 - P(\overline{M}_2)$$

$\overline{M}_2 = M_1 \cap D$ où D = faire un saut de 2 escaliers"

$$p_2 = 1 - p(1-p) = 1 - p - p^2$$

ii) $P(M_k) = 1 - P(M_{k-1} \cap D)$

$$p_k = 1 - p_{k-1}(1-p)$$