Série n° 2

Exercice 1 :
Soit une fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^k) & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $c \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de c et k, la fonction f est une densité de probabilité ?
2. Que vaut $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$ pour $k = 2$?

Exercice 2 :
Soit la v.a. continue X de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}$.

1. Trouver la valeur de k.
2. Déterminer la fonction de répartition F de cette v.a. X.

Exercice 3 :
Soit X une v.a. de densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $Y = -2X + 1$ est une v.a. et déterminer sa densité de probabilité.
2. Déterminer la densité de probabilité de $Z = X^2$.

Exercice 4 :
Soit X une v.a. continue de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } 0 < x \leqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner les lois de probabilités des v.a. :

1. $Y = X^2$.
2. $Z = \sqrt{X}$.

Exercice 5 :
Soient deux réels $a > 0$ et $\alpha > 0$. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{a}{2} \\ \alpha(a-x) & \text{si } \frac{a}{2} \leqslant x < a \\ 0 & \text{si } x \geqslant a \end{cases}$$

1. Calculer la constante α pour que f soit une densité de probabilité. On choisit dorénavant cette valeur pour α.
2. Soit X une v.a. continue de densité f et soit un réel $b \in]0, \frac{a}{2}[$. Calculer les probabilités $P\left(X > \frac{a}{2}\right)$ et $P\left(\frac{a}{2} - b < X \leqslant \frac{a}{2} + b\right)$.
3. Démontrer que pour tout $b \in]0, \frac{a}{2}[$, les événements $A = \left(X > \frac{a}{2}\right)$ et $B = \left(\frac{a}{2} - b < X \leqslant \frac{a}{2} + b\right)$ sont indépendants.

Exercice 6 :
On considère les deux fonctions F et H données par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad H(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

Ces fonctions peuvent-elles être des fonctions de répartitions des v.a. X et Y respectivement ?

Exercice 7 :
La densité d'une v.a. continue X est f. Trouver la densité h de la v.a. $Y = aX + b$, où $a \neq 0$ et b ne sont pas aléatoires.