Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
S.M.A. Semestre 6
T.D. de Probabilités 2

Corrigés de la série n° 2

Exercice 1 :

1. Du fait que $f(x)$ soit positive, on doit avoir $c(1-x^k) > 0$.
   Comme $1-x^k \geqslant 0$ car $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a $c > 0$.
   La relation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ entraîne $c\int_0^1 (1-x^k)dx = 1$ ou $c = \frac{k+1}{k}$.
   Pour tout couple (c,k) lié par la relation précédente, c'est-à-dire $(\frac{k+1}{k}, k); k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f(x)$ définit une densité de probabilité.
   On peut énumérer les couples $(2,1); (\frac{3}{2}, 2); \cdots; (\frac{n+1}{n}, n); \cdots$
2. Si $k=2$,
   $f(x)$ s'écrit
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   et $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx = \frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x^2)dx = 0,31$

Exercice 2 :

1. Du fait que f soit positive, on doit avoir $k > 0$.
   La relation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ donne $k\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$
   ou $k \operatorname{Arcsin} 1 = 1$ c'est-à-dire $k = \frac{2}{\pi}$.
2. La fonction de répartition F de cette v.a. X est :
   $$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
   $$= \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
   Donc :
   $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{Arcsin} x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 3 :
On note f_X la densité de probabilité de la v.a. X qui est :
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Soit $Y = -2X + 1$. On a vu dans la $2^{\text{ème}}$ question de l'exercice 7, de la série 1, que si X est une v.a., alors $Y = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est aussi une v.a.

   Ici on a $a = -2$ et $b = 1$, même raisonnement $Y = -2X + 1$ est aussi une v.a. ; ou on peut écrire : $\{Y \leqslant x\} = \{-2X + 1 \leqslant x\} = \{X \geqslant \frac{1-x}{2}\} = \{X < \frac{1-x}{2}\}^c \in$ tribu considérée, (car X est una v.a.).

   Déterminons f_Y sa densité de probabilité. On a $Y = g(X)$ avec $g(x) = -2x + 1$ qui est une application **bijective**. D'où

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$$

   On a : $g^{-1}(y) = \frac{1-y}{2}$, alors $\left(g^{-1}(y)\right)' = -\frac{1}{2}$ et $f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leqslant \frac{1-y}{2} \leqslant 1$, i.e., $f_X\left(g^{-1}(y)\right) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leqslant y \leqslant 3$. Donc :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leqslant y \leqslant 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Déterminons f_Z la densité de probabilité de $Z = X^2$. D'abord, Z est bien une v.a. car $\{X^2 \leqslant x\} = \{-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant< \sqrt{x}\} \in$ la tribu considérée.

   $Z = X^2$, la transformation considérée ici, n'est pas bijective, donc, on ne peut pas utiliser la formule que l'on a utilisé dans la question précédente. Alors, on détrminera, d'abord, la fonction de répartition F_Z et on la dérive, par la suite, pour trouver la densité f_Z.

   Comme la fonction de répartition F_X de la v.a. X est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   On a : $F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(X^2 \leqslant z)$

   $*$ <u>Si $z \leqslant 0$,</u> alors $F_Z(z) = 0$.

   $*$ <u>Si $z > 0$,</u> on trouve $F_Z(z) = P(-\sqrt{z} \leqslant X \leqslant< \sqrt{z})$

$$= F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z})$$

   <u>si $z \leqslant 1$</u>, on a $F_Z(z) = \frac{\sqrt{z}+1}{2} - \frac{-\sqrt{z}+1}{2} = \sqrt{z}$

   <u>si $z > 1$</u>, on a $F_Z(z) = 1 - 0 = 1$

   d'où

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0 \\ \sqrt{z} & \text{si } z \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } z > 1 \end{cases}$$

   On en déduit la fonction de densité de probabilité de Z :

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin]0, 1] \\ \frac{1}{2\sqrt{z}} & \text{si } z \in]0, 1] \end{cases}$$

Exercice 4 :

La fonction de répartition de X est : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dt$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{a} & \text{si } 0 < x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

1. Déterminons f_Y la fonction de densité de probabilités de la v.a. $Y = X^2$
   Soit $y \in \mathbb{R}; P(Y \leqslant y) = P(X^2 \leqslant y)$
   si $y < 0$; $P(Y \leqslant y) = 0$
   si $y \geqslant 0$; $P(Y \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y})$
   $$= P(X \leqslant \sqrt{y}) - P(X \leqslant -\sqrt{y})$$
   $$= F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = F(\sqrt{y})$$
   Donc
   $$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{a} & \text{si } 0 < y \leqslant a^2 \\ 1 & \text{si } y \geqslant a^2 \end{cases}$$
   D'où
   $$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{y}} & \text{si } 0 < y \leqslant a^2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$
2. De même, pour $Z = \sqrt{X}$.
   Soit $z \geqslant 0$, $F_Z(z) = P(Z \leqslant z) = P(X \leqslant z^2) = F(z^2)$
   Donc $f_Z(z) = 2zF'_X(z^2) = 2zf_X(z^2)$
   D'où
   $$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2z}{a} & \text{si } 0 < z \leqslant \sqrt{a} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exercice 5 :

1. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut que
   $f(x) \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
   Alors il faut que $\alpha > 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \alpha x dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \alpha(a-x)dx = 1$
   c'est-à-dire, il faut que $\alpha \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}} + \alpha a \left[x\right]_{\frac{a}{2}}^{a} - \alpha \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}}^{a} = 1$
   et on trouve $\alpha = \frac{4}{a^2}$
2.
   $$P\left(X > \frac{a}{2}\right) = \alpha \int_{\frac{a}{2}}^{a} (a-x)dx$$
   $$= \frac{4}{a^2}\left(a(a - \frac{a}{2}) - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}\right) = \frac{1}{2}$$
   $$P\left(\frac{a}{2} - b < X \leqslant \frac{a}{2} + b\right) = \int_0^{\frac{a}{2}+b} f(x)dx - \int_0^{\frac{a}{2}-b} f(x)dx$$
   $$= \int_0^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} f(x)dx - \int_0^{\frac{a}{2}-b} f(x)dx$$
   $$= \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} f(x)dx$$
   $$= \alpha\left(\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} xdx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} (a-x)dx\right)$$

Soit le changement de variable $y = a - x$, dans la $2^{\text{ème}}$ intégrale

$$P\left(\frac{a}{2} - b < X \leqslant \frac{a}{2} + b\right) = \alpha\left(\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} xdx - \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}-b} ydy\right) = 2\alpha \int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}} xdx = 2\alpha \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}}$$

$$= \alpha b(a-b) = \frac{4b(a-b)}{a^2}$$

3. On a : $P(A \cap B) = P(\frac{a}{2} < X \leqslant \frac{a}{2} + b)$

$$= \alpha \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} (a-x)dx$$

Soit, par changement de variable $y = a - x$

$$P(A \cap B) = \alpha \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+b} ydy = \frac{\alpha}{2}\left[b(a-b)\right]$$

Ce qui démontre que l'on a : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, c'est-à-dire que les événements A et B sont indépendants.

Exercice 6 :
D'une manière générale, F est une fonction de répartition d'une v.a. X définie par $F(x) = P(X \leqslant x), \forall x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, elle a les propriétés suivantes :
- F est non-décroissante.
- F est continue à droite en tout point x de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Vérifions si ces conditions sont vérifiées pour les fonctions F et H données.

1. La fonction F donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$*$ Sa dérivée est :

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Donc $F'(x) \geqslant 0$, d'où F est non-décroissante.
$*$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$; on a : $\lim\limits_{x \to \alpha} F(x) = F(\alpha) \Leftrightarrow F$ est continue en $\alpha; \alpha \neq 0$.
pour $\alpha = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = 0 \neq F(0) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{1}{2} = F(0)$$

Donc F est continue à droite de zéro, mais discontinue à gauche de zéro.
$*$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (0) = 0$
$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{2}\right) = 1 - 0 = 1$
Donc F est bien une fonction de répartition d'une certaine v.a.

2. La fonction H définie par :

$$H(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

On vérifie de même que :

- H est non-décroissante.
- H est continue en tout point $\alpha \in \mathbb{R}^*$
  Pour $\alpha = 0$, on a $\lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = 0 = H(0)$
  $\lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = 1 \neq 0 = H(0)$
  Donc H est continue à gauche de zéro, mais discontinue à droite de zéro.
  D'où H ne peut être considérée comme une fonction de répartition et ceci malgré que l'on ait : $\lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = 1$.

Exercice 7 :
La fonction $g(x) = ax + b$ est dérivable et sa dérivée garde un signe constant pour tout x, on peut, donc appliquer la formule $h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right) \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$ où h est la densité de probabilité de la variable $Y = ax + b$.
La fonction inverse $g^{-1}(y)$ se calcule en résolvant l'équation $y = ax + b$ par rapport à x ; on obtient $g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a}$. D'après le calcul $\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{a}$; $\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{|a|}$. D'où $h(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$