Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
S.M.A. Semestre 6
T.D. de Probabilités 2

Série n° 3

Exercice 1 :
On veut montrer qu'une v.a. qui suit une loi géométrique n'a pas de mémoire. Pour cela, on considère une v.a. X qui suit une loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$, alors, montrer que pour tout $k_0 \geqslant 0$ et $k > 1$:

$$P(X \geqslant k_0 + k / X > k_0) = P(X \geqslant k)$$

Exercice 2 :
Soit X une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) et Y une v.a. qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que n entier naturel, $\{Y/X = n\} \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la loi Y.

Exercice 3 :
Montrer que X est une v.a. suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{\lambda}{n} P(X = n - 1)$.

Exercice 4 :
Soit X une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

1. Montrer que la v.a. $Y = n - X$ suit une loi binomiale de paramètres n et $1 - p$.
2. Montrer que $P(X = k) = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} P(X = k - 1)$. Recalculer $P(X = k)$ par récurrence.

Exercice 5 :
Soit X une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite ($X \sim \mathcal{N}(0, 1)$). On considère la v.a. $Y = X^2$

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
2. En déduire la fonction de densité f_Y de Y.

Exercice 6 :
Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On considère la v.a. $Y = \sin X$

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
2. En déduire la fonction de densité f_Y de Y.

Exercice 7 :
On dit qu'une v.a. Y suit une loi Log-normale de paramètres μ et σ, et on note $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$, si la v.a. $X = \ln Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Déterminer la fonction de densité f_Y de Y.
2. Exprimer la fonction répartition F_Y de Y en terme de la fonction de répartition d'une v.a. normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 8 :
Démontrer que l'espérance mathématique et la variance de la v.a. X suivant une loi hypergéométrique de paramètres n, a et b sont égales respectivement à :

$$E(X) = \frac{na}{a+b}$$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Exercice 9 :
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, majorer la probabilité pour que la v.a. X d'espérance mathématique μ et d'écart-type σ s'écarte de μ à moins de 3σ.

Exercice 10 :
Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$. Montrer que la distribution conditionnelle de X par $X+Y$, est une loi binomiale.

Exercice 11 :
Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. α et β étant deux nombres tels que $\alpha \leqslant \beta$. Calculer $P(X = \alpha / X + Y = \beta)$.

Exercice 12 :
On considère la loi trinomiale définie par :

$$P(X = x, Y = y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$$

où $(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2$ et $p_j \geqslant 0$ avec $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

1. Déterminer la loi marginale de X.
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y par $X = x$.

Exercice 13 :
Soit une v.a. X qui suit la loi exponentielle de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

Établir dans quelles conditions existent l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y = e^X$ et quelle est leur valeur.