Variables aléatoires

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

2019/2020

Variables aléatoires :

Définition :

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces probabilisables.
L'application X de Ω dans Ω' est dite variable aléatoire (v.a.) lorsque pour tout $B \in \mathcal{A}'$, on a :

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

Une v.a. X est, donc, une application mesurable pour les tribus $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$.

Tribu engendrée par une v.a. :

Définition :

La tribu engendrée par une v.a. X et notée $\sigma(X)$ est la tribu la plus petite par rapport à laquelle X est mesurable :

$$\sigma(X) = \{A \in \mathcal{A} / \exists B \in \mathcal{A}'; A = X^{-1}(B) = \{X \in B\}\}$$

Variables aléatoires :

Tribu borelienne :

- La tribu borelienne, notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$ (i.e. c'est la plus petite tribu qui contient les ouverts de $\mathbb{R}$).
- On peut écrire $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\text{ouverts de } \mathbb{R}) = \sigma(\text{fermés de } \mathbb{R})$.
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est aussi engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[; a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(]a, b[; a, b \in \mathbb{R})$$

Variable aléatoire réelle (v.a.r.) :

Si $(\Omega', \mathcal{A}') \equiv (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, alors X est une v.a.r.

Ensemble de réalisation d'une v.a. :

- Les valeurs de la v.a. X sont dites les "réalisations de X".
- L'ensemble de ces réalisations est notée $X(\Omega)$.

Loi de probabilité d'une v.a. X :

Définition :

L'application, notée P_X, définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ par :

$$P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right) = P\{\omega / X(\omega) \in B\}$$

est appelée loi de probabilité de la v.a. X

Fonction de répartition d'une v.a.r. :

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une v.a.r. définie sur Ω à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
On appelle fonction de répartition de X, la fonction notée F et définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P(X \leq x)$$

Fonction de répartition d'une v.a.r. :

Remarque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x)$$
$$= P(X^{-1}(]-\infty, x])) = P_X(]-\infty, x])$$

Propriétés :

1. F est croissante (non-décroissante).
2. F est continue à droite.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Preuve :

1. Soit $x \leq y$; alors $]-\infty, x] \subset]-\infty, y]$
   par suite $F(x) = P_X(]-\infty, x]) \leq P_X(]-\infty, y]) = F(y)$
2. Soit une suite numérique $(x_n)_n$ décroissante telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} x_n = x'$
   alors $(]-\infty, x_n])_n$ est une suite décroissante d'événements.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (]-\infty, x_n]) =]-\infty, x']$$

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} P(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} P_X(]-\infty, x_n])$$
$$= P_X(\lim_{n\to\infty}]-\infty, x_n]) = P_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, x_n]\right)$$
$$= P_X(]-\infty, x']) = F(x')$$

3. Analogue à 2°)

Remarque :

On peut montrer que toute fonction F vérifiant les trois propriétés précédentes définit la fonction de répartition d'une certaine v.a.

Variable alátoire discrète, variable aléatoire continue :

Variable alátoire discrète :

Définition :

Une v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite discrète, si l'ensemble de ses réalisations $X(\Omega)$ a un nombre fini (ou infini dénombrable) d'éléments.

Remarque :

Soient $x_1, x_2, \cdots$ les réalisations de X, c'est-à-dire $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots\}$. On note pour tout $i = 1, 2, 3, \cdots, X^{-1}(\{x_i\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x_i\}$ $= (X = x_i)$. Les événements $(X = x_i)$ forment un système complet et $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$.

Variable aléatoire discrète :

Loi de probabilité d'une v.a. discrète :

Les nombres $P(X = x_i)$, notés p_i, vérifiant :

$$p_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

forment une loi de probabilité de la v.a. discrète X.

Fonction de répartition d'une v.a. discrète :

La fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Variable aléatoire continue :

Définition :

Soit une v.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dont la fonction de répartition est F.
La v.a. X est dite continue ou absolument continue s'il existe une fonction positive f telle que : $\forall x \in \mathbb{R}; F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.
La fonction f est dite fonction de densité de probabilité de X.

Propriétés :

1. $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$
2. $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$
3. Si f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0, avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

Théorème :

Soit X une v.a., alors
$P(X = a) = \lim_{t \to a^-} P(t < X \leq a) = F(a) - F(a^-)$

Preuve :

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui croît vers a et soit $A_n = \{t_n < X \leq a\}$;
$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante avec $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{X = a\}$.
Donc $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) = P\{X = a\}$ (car $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$)
et puisque $P(t_n < X \leq a) = F(a) - F(t_n)$, on a :
$\lim\limits_{n \to \infty} P(t_n < X \leq a) = F(a) - \lim\limits_{n \to \infty} F(t_n) = F(a) - F(a^-)$. ■

Remarque :

- F est continue en $a \Leftrightarrow P(X = a) = 0$.
- F admet en a une discontinuité (ou saut) $\Leftrightarrow P(X = a) > 0$.

Loi d'une fonction d'une v.a. :

Si X est une v.a. discrète :

Soit X une v.a. discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots\}$ et g une fonction de $X(\Omega)$ dans l'ensemble $E = \{y_1, y_2, \cdots\}$. Alors $Y = g(X)$ est une v.a. telle que : $\forall j; (Y = y_j) = \bigcup_{i \in I}(X = x_i)$ où la réunion est prise sur $I = \{i / g(x_i) = y_j\}$ d'où $P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)$

Exemple :

Soit X une v.a. discrète de loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	-1	0	1	2
$p_i = P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,3

Cherchons la loi de $Y = X^2 + 1$

Y prend les valeurs $1, 2$ et 5 avec les probabilités :

Loi d'une fonction d'une v.a. :

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = 0,3$$

$$P(Y = 2) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

$$P(Y = 5) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0,1 + 0,3 = 0,4$$

D'où la loi de Y :

y_j	1	2	5
$p_j = P(Y = y_j)$	0,3	0,3	0,4

Loi d'une fonction d'une v.a. :

Si X est une v.a. continue :

Soit X une v.a. continue de densité f_X et soit $Y = g(X)$ où g est une fonction strictement monotone et dérivable. Alors, $Y = g(X)$ est une v.a. continue dont la densité f_Y est donnée par :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| & \alpha < y < \beta \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

avec $\alpha = \min\{g(-\infty), g(+\infty)\}$ et $\beta = \max\{g(-\infty), g(+\infty)\}$

Preuve :

• Si g est strictement croissante et dérivable alors elle est continue et strictement croissante (donc g est bijective), les limites α et β existent (peuvent être infinies) et la fonction inverse g^{-1} existe, elle est dérivable et strictement croissante. Donc,

$P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y))$

Preuve :

D'où $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$ avec F_X et F_Y sont respectivement les fonctions de répartition des v.a. X et Y.
En dérivant, on obtient : $f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right).\left(g^{-1}(y)\right)'$
• Si g est strictement décroissante, alors g^{-1} est aussi strictement décroissante,

$$P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$
$$= P(X > g^{-1}(y))$$
$$= 1 - P(X \leq g^{-1}(y))$$

d'où $$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$
En dérivant, on obtient $f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))'$
D'où le résultat.

Exemple :

Soit X une v.a. continue de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Cherchons les densités de $Y = e^X$ et de $Y = -2\ln X$.

a) $Y = e^X \Leftrightarrow X = \ln Y$ avec $Y > 0; \forall X$
et on a : $f_Y(y) = 1. \left|\frac{1}{y}\right| ; 0 < \ln y < 1$
c'est-à-dire que :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } 1 < y < e \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

b) $Y = -2\ln X \Leftrightarrow X = e^{\frac{-Y}{2}}$

$$f_Y(y) = 1.\left|-\frac{1}{2}e^{\frac{-y}{2}}\right|; 0 < e^{\frac{-y}{2}} < 1$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\frac{-y}{2}} & \text{si } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Remarque :

Si g n'est pas bijective ou si g n'est pas strictement monotone, alors on trouve la densité de $Y = g(X)$ par dérivation de $P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$.

Contre-exemple :

Soit X une v.a. continue de densité f_X. Cherchons f_Y la densité de $Y = X^2$.

Contre-exemple :

On a $Y = g(X)$ avec $g(x) = x^2$.

Dans ce cas $g'(x) = 2x$ qui est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$, d'où g n'est pas strictement monotone.

Mais, pour $y > 0$, on a : $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) =$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

En dérivant, on obtient :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$