Corrigés de la série n° 3

Exercice 1 :
On considère une v.a. X qui suit une loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$, alors, $\forall k \in X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ on a :

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad \text{avec} \quad q = 1 - p$$

Montrons que la loi géométrique n'a pas de mémoire :

$$\begin{aligned} P(X \geqslant k) &= P(X = k) + P(X = k+1) + \cdots \\ &= pq^{k-1}(1 + q + \cdots) \\ &= \frac{pq^{k-1}}{1-q} = q^{k-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} P(X \geqslant k + k_0 / X > k_0) &= \frac{P(X \geqslant k + k_0, X \geqslant k_0 + 1)}{P(X \geqslant k_0 + 1)} \\ &= \frac{P(X \geqslant k + k_0)}{P(X \geqslant k_0 + 1)}, \quad (\text{car} \quad k > 1) \\ &= \frac{q^{k+k_0-1}}{q^{k_0}} = q^{k-1} \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $k_0 \geqslant 0$ et $k > 1$,

$$P(X \geqslant k + k_0 / X > k_0) = P(X \geqslant k)$$

Exercice 2 :
Soit X une v.a. qui suit la loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$) et Y une v.a. qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que n entier naturel, $\{Y/X = n\} \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminons la loi Y. Pour cela, calculons $P(Y = k)$.

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\{Y = k\} \cap \Omega) = P(\{Y = k\} \cap \cup_{n=0}^{\infty} \{X = n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k, X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k / X = n).P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Changement d'indice $n-k=j$,

$$P(Y=k)=\frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{j+k}}{j!}=\frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\lambda^k(1-p)^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j(1-p)^j}{j!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{k!}p^k\lambda^k\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}=\frac{e^{-\lambda}}{k!}(\lambda p)^k e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

Donc $Y\sim\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 3 :
Montrons que : $X\sim\mathcal{P}(\lambda)\Longleftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X=n)=\frac{\lambda}{n}P(X=n-1)$

Soit $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$, alors $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X=n)=\lambda^n\frac{e^{-\lambda}}{n!}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X=n)=\frac{\lambda}{n}\lambda^{n-1}\frac{e^{-\lambda}}{(n-1)!}$

D'où $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X=n)=\frac{\lambda}{n}P(X=n-1)$

Réciproquement, supposons que $\forall n\in\mathbb{N}^*, P(X=n)=\frac{\lambda}{n}P(X=n-1)$

Alors, $P(X=n)=\frac{\lambda}{n}.\frac{\lambda}{n-1}.\frac{\lambda}{n-2}\cdots\lambda P(X=0)=\frac{\lambda^n}{n!}P(X=0)$

Or, on sait que $\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n)=1$

Donc $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}P(X=0)=P(X=0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}=P(X=0)e^{\lambda}=1$

D'où $P(X=0)=e^{-\lambda}$ et $P(X=n)=\lambda^n\frac{e^{-\lambda}}{n!}$

i.e. $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 4 :
Soit une v.a. $X\sim\mathcal{B}(n,p)$

1. Soit la v.a. $Y=n-X$, on a : $P(Y=k)=P(X=n-k)=C_n^{n-k}p^{n-k}(1-p)^k$
   Comme $C_n^{n-k}=C_n^k$, on obtient $P(Y=k)=C_n^k(1-p)^kp^{n-k}=C_n^k(1-p)^k(1-(1-p))^{n-k}$
   Donc $Y\sim\mathcal{B}(n,1-p)$.
2. On a : $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}$
   et $P(X=k-1)=C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k+1}$
   donc $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_n^kp}{C_n^{k-1}(1-p)}=\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!}\frac{p}{(1-p)}$
   $=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$, d'où l'égalité.
   Calcul de $P(X=k)$ par récurrence :
   $P(X=k)=P(X=k-1)\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}$
   $=P(X=k-2)\frac{(n-k+2)(n-k+1)p^2}{(k-1)k(1-p)}$
   $=\cdots\cdots$

$= P(X=0)\dfrac{n\cdots(n-k+2)(n-k+1)p^k}{1\times\cdots\times(k-1)k(1-p)^k}$

et comme $P(X=0)=(1-p)^n$ et $n\cdots(n-k+2)(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$,

on retrouve la formule.

Exercice 5 :

Soit X une v.a. qui suit une loi normale centrée réduite ($X\sim\mathcal{N}(0,1)$). On considère la v.a. $Y=X^2$

1. On a $X\sim\mathcal{N}(0,1)$; donc $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in\mathbb{R}$

   $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(X^2\leqslant y)$

   d'où deux cas à distinguer :

   <u>1</u>

   1$^{\text{er}}$ cas : Si $y\leqslant 0$; $F_Y(y)=P(X^2\leqslant y)=0$ car $X^2\geqslant 0$ (p.s.).

   2$^{\text{ème}}$ cas : Si $y>0$; $F_Y(y)=P(X^2\leqslant y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})$

   $=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

   $f_X(x)$ étant une fonction paire.

   Posons $x^2=u\Rightarrow 2xdx=du\Rightarrow dx=\frac{du}{2\sqrt{u}}$

   On a $F_Y(y)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y\frac{1}{2}e^{-\frac{u}{2}}u^{-\frac{1}{2}}du$

   Or, on sait que $\sqrt{\pi}=\Gamma(\frac{1}{2})$, avec Γ la seconde fonction d'Euler définie par :

   $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}dt$

   on peut donc écrire :

   $$F_Y(y)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^y u^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}du$$

   de la forme $F_Y(y)=\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^y u^{\alpha-1}e^{-\frac{u}{\beta}}du$

   ce qui est la fonction de répartition d'une v.a. suivant une loi gamma de paramètres $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=2$.

   Donc,

   $$F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\leqslant 0\\ \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^y u^{\frac{1}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}du & \text{si } y>0\end{cases}$$

   ou encore : $Y\sim\Gamma(\alpha=\frac{1}{2},\beta=2)$

   Définition :

   Dans ce cas particulier ($\beta=2$ et $\alpha=\frac{m}{2}$, $m\neq 2n$). On dit que Y suit une loi de Khi-deux ($\mathcal{X}_1^2$) à un degré de liberté.

2. On en déduit la fonction de densité f_Y de Y :

   $$f_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\leqslant 0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}du & \text{si } y>0\end{cases}$$

   car $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

Exercice 6 :

Soit X une v.a. qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$. On considère la v.a. $Y=\sin X$

1. On a : $X \sim \mathcal{U}(0, \frac{\pi}{2})$, alors :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

On peut écrire $X(\Omega) \subset [0, 1]$
Pour $y \in \mathbb{R}, F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P(\sin X \leqslant y)$
Trois cas sont à envisager :
<u>**1**$^{\text{er}}$ **cas :**</u> Si $y \leqslant 0$

$$F_Y(y) = P(\sin X \leqslant y) = 0 \ \text{ car } \ \sin X \in [0, 1]$$

<u>**2**$^{\text{ème}}$ **cas :**</u> Si $0 < y < 1$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\sin X \leqslant y) = P(X \leqslant \operatorname{Arcsin} y) \\ &= \int_0^{\operatorname{Arcsin} y} \frac{2}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} y \end{aligned}$$

<u>**3**$^{\text{ème}}$ **cas :**</u> Si $y \geqslant 1$

$$F_Y(y) = P(\sin X \leqslant y) = 1 \ \text{ car } \ \sin X \in [0, 1]$$

Donc, on peut écrire que :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$$

2. $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin} y\right) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ pour $0 < y < 1$.
On a :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin]0, 1[\\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in]0, 1[\end{cases}$$

Exercice 7 :
On dit qu'une v.a. Y suit une loi Log-normale de paramètres μ et σ, et on note $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma)$, si la v.a. $X = \ln Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. on a $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma) \Longleftrightarrow X = \ln Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma); Y > 0$
Posons $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} = \dfrac{\ln Y - \mu}{\sigma} = \phi^{-1}(Y) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ où ϕ^{-1} est définie pour $y > 0$
et $Y = \phi(Z) = e^{\sigma Z + \mu}$ avec la fonction ϕ continue et strictement monotone, donc,
$f_Y(y) = f_Z\left(\phi^{-1}(y)\right) \left|(\phi^{-1}(y))'\right| = f_Z\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \left|\frac{1}{\sigma y}\right|$
avec $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$
Donc $f_Y(y) = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2}$ pour $y > 0$.
D'où

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leqslant 0 \end{cases}$$

2. On peut écrire $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sigma t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$

Posons $u = \frac{\ln t - \mu}{\sigma} \Rightarrow du = \frac{dt}{\sigma t}$

On a alors
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u(y)} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln y-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= \Phi\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{si } y > 0 \end{aligned}$$

Soit
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \Phi\left(\frac{\ln y-\mu}{\sigma}\right) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

La v.a. $\frac{\ln Y-\mu}{\sigma}$ étant normale centrée réduite.

Exercice 8 :

Soit X une v.a. qui suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n,a,b)$de paramètres n, a et b, alors $P(X=k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$ avec $\sup(0, n-b) \leqslant k \leqslant \inf(a,n)$

Montrons que $E(X) = \frac{na}{a+b}$.

On a : $E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_{k=0}^{n} k C_a^k C_b^{n-k}$

$$= \frac{1}{C_{a+b}^n} a \sum_{k=1}^{n} k C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k}$$

$$= \frac{a}{C_{a+b}^{n-1}} C_{a+b-1}^{n-1} = \frac{an}{a+b}$$

On peut retrouver ce même résultat en considérant X comme une somme de n variables de Bernoulli $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$, non indépendantes. Ces variables X_i ont même espérance mathématique $\frac{a}{a+b}$.

En effet, $E(X_1) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{a}{a+b}$

$E(X_2) = 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1)$.

Comme X_2 et X_1 ne sont pas indépendantes,

$P(X_2 = 1) = P(X_2 = 1/X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1/X_1 = 0)P(X_1 = 0)$

$= \frac{a-1}{a+b-1}\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b-1}\frac{b}{a+b}$

$= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a-1+b}{a+b-1}\right) = \frac{a}{a+b}$;

d'où $E(X_2) = \frac{a}{a+b}$.

De même, on trouve $E(X_3) = \cdots = E(X_n) = \frac{a}{a+b}$

et $E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n\dfrac{a}{a+b}$

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

En effet, $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$

$$E(X^2) = \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[\sum_{k=2}^{n} k(k-1) C_a^k C_b^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k C_a^k C_b^{n-k}\right]$$
$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)\sum_{k=2}^{n} C_{a-1}^{k-2} C_b^{n-k} + \frac{an}{a+b}\right]$$
$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1)\sum_{k=2}^{n-2} C_{a-1}^{k} C_b^{n-k} + \frac{an}{a+b}\right]$$
$$= \frac{1}{C_{a+b}^n}\left[a(a-1) C_{a+b-2}^{n-2} + \frac{an}{a+b}\right]$$
$$= \frac{a(a-1)b(n-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{an}{a+b}.$$

Comme $E(X)^2 = \left(\dfrac{an}{a+b}\right)^2$, on en déduit $Var(X) = \dfrac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.
De la même manière que pour $E(X)$, on peut retrouver ce même résultat en considérant X comme une somme de n variables de Bernoulli $X_i, i = 1, 2, \cdots, n$, non indépendantes.

En effet, $Var(X) = Var\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i>j} Cov(X_i, X_j)$

$$= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$$

On a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n\frac{a}{a+b}\frac{b}{a+b} = n\frac{ab}{(a+b)^2}$

et $Cov(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2 = P(X_iX_j = 1) - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2$

avec $P(X_iX_j = 1) = P(X_j = 1/X_i = 1)P(X_i = 1) = P(X_j = 1/X_i = 1)\dfrac{a}{a+b}$.

Comme $P(X_j = 1/X_i = 1)$ ne dépend pas de i et j, $P(X_j = 1/X_i = 1) = \dfrac{a-1}{a+b-1}$;

d'où : $Cov(X_i, X_j) = \dfrac{a}{a+b}\dfrac{a-1}{a+b-1} - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2$

et $Var(X) = n\dfrac{ab}{(a+b)^2} + \left(\dfrac{a}{a+b}\dfrac{a-1}{a+b-1} - \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^2\right) = \dfrac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.

Exercice 9 :

Soit la v.a. X telle que $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$ existent. L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev s'écrit, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P(|X - \mu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

En particulier pour $\varepsilon = 3\sigma$, on obtient :

$$P(|X - \mu| \geqslant 3\sigma) \leqslant \frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2} = \frac{1}{9}$$

Donc $P(|X-\mu| < 3\sigma) \geqslant \frac{8}{9} \approx 0,888$
Ainsi, toute v.a. s'écarte de son espérance mathématique à moins de 3σ avec une probabilité non inféfieure à $\frac{8}{9}$. C'est le cas extrême, le plus défavorable. Dans la pratique, pour les v.a. qui se présentent dans les cas courants, cette probabilité est bien plus proche de l'unité ; par exemple, pour la loi normale, elle est égale à $0,997$; pour la loi uniforme, à l'unité ; pour la loi exponentielle, à $0,982$.

Exercice 10 :
Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, indépendantes.
Soit $m, n \in \mathbb{Z}^+$ avec $m < n$, et cherchons la probabilité conditionnelle $P(X = m/X+Y = n)$
On a :

$$P(X=m/X+Y=n) = \frac{P(X=m, Y=n-m)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=m).P(Y=n-m)}{P(X+Y=n)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^m}{m!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{n-m}}{(n-m)!}}{\sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{\lambda_1^k}{k!}\frac{\lambda_2^{(n-k)}}{(n-k)!}} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\lambda_1^m\lambda_2^{n-m}}{m!(n-m)!}}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}$$

$$= C_n^m \frac{\lambda_1^m \lambda_2^{n-m}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = C_n^m \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-m} ; m = 0, 1, 2, \cdots, n$$

Donc $X/X+Y = n \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

Exercice 11 :
Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. α et β étant deux nombres tels que $\alpha \leqslant \beta$. On veut calculer $P(X = \alpha/X+Y = \beta)$.
D'abord, on doit savoir que si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$, avec X et Y deux v.a. indépendantes, alors, $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.
<u>En effet :</u>
Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A P(X=a).P(X=b)$$

où $A = \{(a,b)/0 \leqslant a \leqslant n, 0 \leqslant b \leqslant m, a+b = \beta\}$.

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A C_n^a p^a (1-p)^{n-a}.C_m^b p^b (1-p)^{m-b}$$

$$P(X+Y=\beta) = \sum_A C_n^a.C_m^b p^{a+b}(1-p)^{n+m-(a+b)}$$

Or $\sum_A C_n^a.C_m^b = \sum_{\beta=a+b=0}^{n+m} C_n^a.C_m^b = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a} = C_{n+m}^{\beta}$

<u>En effet :</u>
Considérons $(1+x)^{n+m} = (1+x)^n.(1+x)^m$.

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i$$

$$(1+x)^m = \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$$

On a donc $\sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k x^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i . \sum_{j=0}^{m} C_m^j x^j$
En identifiant les coefficients de x^k, on peut écrire :

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_m^{j=k-i}$$

D'où, en prenant $i=a$, $j=b$ et $k=\beta$, $C_{n+m}^{\beta} = \sum_{a=0}^{n} C_n^a C_m^{\beta-a}$ On en déduit que :

$$P(X+Y=\beta) = C_{n+m}^{\beta} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}$$

i.e. $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.
Calculons, maintenant, $P(X=\alpha / X+Y=\beta)$.
X et Y étant indépendantes, on peut écrire :

$$P(X=\alpha / X+Y=\beta) = \frac{P(X=\alpha, X+Y=\beta)}{P(X+Y=\beta)}$$

$$= \frac{P(X=\alpha / Y=\beta-\alpha)}{P(X+Y=\beta)}$$

$$= \frac{C_n^{\alpha} p^{\alpha} (1-p)^{n-\alpha} . C_m^{\beta-\alpha} p^{\beta-\alpha} (1-p)^{m-\beta+\alpha}}{C_{n+m}^{\beta} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}}$$

$$= \frac{C_n^{\alpha} C_m^{\beta-\alpha} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}}{C_{n+m}^{\beta} p^{\beta} (1-p)^{n+m-\beta}}$$

Soit $P(X=\alpha / X+Y=\beta) = \frac{C_n^{\alpha} C_m^{\beta-\alpha}}{C_{n+m}^{\beta}}$
On voit, donc, que la loi de X conditionnée par $X+Y=\beta$ est hypergéométrique de paramètres $n+m$, n et β (que l'on note par $\mathcal{H}(n+m,n,\beta)$).

Exercice 12 :
Considèrons la loi trinomiale :

$$P(X=x, Y=y) = \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y},$$

où $(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2$ et $p_j \geqslant 0$ avec $p_1+p_2+p_3=1$.

1. Ona $0 \leqslant x \leqslant n$ et $0 \leqslant y \leqslant n-x$. La loi marginale de X est donnée par :

$$P(X=x) = \sum_{y=0}^{n-x} P(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{y=0}^{n-x} \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} p_1^x \sum_{y=0}^{n-x} \frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!} p_2^y p_3^{n-x-y}$$

$$= C_n^x p_1^x (p_2+p_3)^{n-x} = C_n^x p_1^x (1-p_1)^{n-x}; x=0,1,\cdots,n$$

C'est-à-dire $X \sim \mathcal{B}(n,p_1)$.

2. La loi conditionnelle de Y par $X = x$ sera :

$$P(Y = y/X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

Donc, pour $0 \leqslant x \leqslant n$ et $0 \leqslant y \leqslant n - x$, on a :

$$P(Y = y/X = x) = \frac{\frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} p_1^x p_2^y p_3^{n-x-y}}{\frac{n!}{x!(n-x)!} p_1^x (1-p_1)^{n-x}}$$

D'où :

$$P(Y = y/X = x) = \begin{cases} \frac{(n-x)!}{y!(n-x-y)!} \left(\frac{p_2}{1-p_1}\right)^y \left(\frac{p_3}{1-p_1}\right)^{n-x-y} & \text{si } \; y = 0, 1, \cdots, n - x \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Donc, c'est une loi $\mathcal{B}(n - x, \frac{p_2}{1-p_1})$

Exercice 13 :

$$E(Y) = E(e^X) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)dx \qquad \text{(Théorème de transfert)}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - 1)x} dx$$

Pour $\lambda - 1 > 0$, c'est-à-dire pour $\lambda > 1$, cette intégrale existe, elle vaut $E(Y) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.
Pour $\lambda \leqslant 1$, elle est divergente.

$$E(Y^2) = E((e^X)^2) = E(e^{2X})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x} f(x)dx \qquad \text{(Théorème de transfert)}$$

$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{2x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - 2)x} dx$$

Pour $\lambda > 2$, cette intégrale existe et vaut $\frac{\lambda}{\lambda - 2}$, alors que la variance $Var(X) = \frac{\lambda}{\lambda-2} - \left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2$, pour $\lambda \leqslant 2$, l'intégrale est divergente et la variance $Var(Y)$ n'existe pas.