Chapitre 6:
Fonctions Génératrices
et Fonctions Caractéristiques

Prof. Mohamed El Merouani

2019/2020

Plan

- Fonctions génératrices
- Fonctions génératrices des moments
- Fonctions caractéristiques
- Applications

Fonction génératrice :

Soit X une v.a. discrète telle que $p_k = P(X = k); k = 0, 1, 2, \dots$ avec $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

Définition :

La fonction définie par $G(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$ qui converge pour $|t| \leq 1$, est dite fonction génératrice de la v.a. X.

Conséquence :

Les moments de la v.a. X s'ils existent peuvent être déterminés par les dérivées de $G(t)$ au point $t = 1$.

En effet,

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1} \Rightarrow G'(1) = E(X) \text{ si } E|X| < \infty.$$

$$G''(t) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k t^{k-2} \Rightarrow G''(1) = E(X(X-1)) \text{ si } E(X^2) < \infty.$$

et ainsi de suite...

$$E(X^2) = G'(1) + G''(1)$$

et

$$Var(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2.$$

Fonction génératrice :

Exemple :

Soit X la v.a. de Poisson défine par : $P(X = k) = e^{-k}\frac{\lambda^k}{k!}; k = 0, 1, 2, ...$

On a

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty}(t\lambda)^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}e^{t\lambda} = e^{-\lambda(1-t)}; |t| \leq 1$$

Donc,

$$G'(t) = \lambda e^{-\lambda(1-t)}$$

$$G''(t) = \lambda^2 e^{-\lambda(1-t)}$$

$$E(X) = \lambda;$$
$$E(X^2 - X) = \lambda^2;$$
$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$$

Fonction génératrice des moments :

Définition :

Soit X une v.a. définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
La fonction génératrice des moments est définie pour toute variable aléatoire X par :

$$M(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X = x) & \text{si} \quad X \quad \text{est discrete;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx & \text{si} \quad X \quad \text{est continue} \end{cases}$$

Si $E(e^{tX})$ existe dans un voisinage de l'origine.

où e est la base de l'exponentielle népérienne et f est la fonction de densité de la variable aléatoire continue X.

Théorème :

Si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0, t_0[, t_0 > 0$, alors ses dérivées de tout ordre existent pout $t = 0$ et de plus $M^{(n)}(0) = E(X^n)\,; n = 0, 1, 2, \cdots$.

Fonction génératrice des moments :

C'est-à-dire que :

Tous les moments d'ordre n peuvent être calculés à l'aide des dérivées de la fonction génératrice des moments au point $t = 0$.

En effet,

$$M'(t) = \frac{d}{dt}E(e^{tX}) = \frac{d}{dt}\left[\sum_x e^{tx}P(X = x)\right] = \sum_x \frac{d}{dt}e^{tx}P(X = x)$$

$$= \sum_x xe^{tx}P(X = x) = E(Xe^{tX}) \ \text{ si } \ X \ \text{ est dicrete et}$$

$$M'(t) = \frac{d}{dt}E(e^{tX}) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f(x)dx\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}e^{tx}f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{tx}f(x)dx = E(Xe^{tX}) \ \text{ si } \ X \ \text{ est continue}$$

Fonction génératrice des moments :

En posant $t = 0$, on a $M'(0) = E(X)$.
De même,

$$M''(t) = \frac{d}{dt}M'(t) = \frac{d}{dt}E(Xe^{tX}) = E(X^2e^{tX})$$

et $M''(0) = E(X^2)$.
D'une facon generale, on a :

$$M^{(n)}(t) = E(X^ne^{tX}), \quad n \geq 1$$

et $M^{(n)}(0) = E(X^n)$.
Ou encore, d'après le théorème précèdent, si $M(t)$ existe pour $t \in]-t_0, t_0[, t_0 > 0$, alors on peut développer $M(t)$ en série de Mc-Laurin :

$$M(t) = M(0) + M'(0).\frac{t}{1!} + M''(0).\frac{t^2}{2!} + \cdots + M^{(n)}(0).\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

Ainsi $E(X^n)$ est le coefficient de $\frac{t^n}{n!}$.

Fonction génératrice des moments :

Remarque :

La fonction génératrice des moments peut ne pas exister.

En effet, $E(e^{tX})$ n'est pas toujours définie.

Exemple 1 :

Soit X une v.a. discrète définie par :

$$P(X = k) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k^2} \quad ; \quad k = 1, 2, \cdots$$

Donc, on a : $M(t) = \dfrac{6}{\pi^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{tk}}{k^2} = \infty$

Exemple 2 :

Soit X une v.a. continue de fonction de densité

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}; \quad x > 0$$

Donc $M(t) = \frac{1}{1-2t}$ pour $t < \frac{1}{2}$,
$M'(t) = \dfrac{2}{(1-2t)^2}$ et $M''(t) = \dfrac{8}{(1-2t)^3}$ pour $t < \frac{1}{2}$,
On en déduit $E(X) = 2$, $E(X^2) = 8$ et $Var(X) = 4$.

Exemple 3 :

Soit X une v.a. continue de densité de probabilité la fonction $f(x) = ce^{-|x|^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $x \in \mathbb{R}$, où c est une constante déterminée par la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Exemple 3 (suite) :

Pour $t > 0$, on a : $\int_0^\infty e^{tx} e^{-x^\alpha} dx = \int_0^\infty e^{x(t - x^{\alpha-1})} dx$ et puisque $\alpha - 1 < 0$, $\int_0^\infty e^{tx} e^{-x^\alpha} dx$ n'est pas finie pour $t > 0$; car $e^{x(t-x^{\alpha-1})} \sim_{x\to\infty} e^{tx}$.
D'où $M(t)$ n'existe pas !
Pourtant $E(|X|^n) = c \int_{-\infty}^{+\infty} |X|^n e^{-|x|^\alpha} dx = 2c \int_0^\infty x^n e^{-x^\alpha} dx$.
Par un changement de variable $y = x^\alpha$, on obtient
$E(|X|^n) = \frac{2c}{\alpha} \int_0^\infty y^{\frac{n+1}{\alpha}-1} e^{-y} dy = \frac{2c}{\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right) < \infty$
On remarque, donc, que même si $M(t)$ est infini, les moments peuvent être finis.

Rappel :

Γ est la fonction gamma d'Euler définie sur $]0,+\infty[$ par :
$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$

Propriétés :

1. $\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
   En effet,
   $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt=(\alpha-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-2}dt=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
2. $\Gamma(1)=1$
   En effet, $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=1$
3. $\Gamma(n)=(n-1)!$
   En effet, $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots=$
   $=(n-1)!\Gamma(1)=(n-1)!$

- Si X est une v.a. quelconque, la fonction génératrice $G(s) = E(s^X)$, nous invite à former : $\int_{-\infty}^{+\infty} s^x dF(x)$.
- Cette intégrale a un sens auvoisinage de $|s| = 1$, ce qui conduit à poser $s = e^{it}$ et á donner à t des valeurs réelles.
- On obtient finalement la fonction : $E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$ notée $\varphi_X(t)$ et dite fonction caractéristique de X
- La fonction caractéristique de X a l'énorme avantage d'exister pour tout nombre réel t et toute v.a. X.
- En outre, la correspondance entre loi de probabilité d'une v.a. et fonction caractéristique est bijective.

Fonction caractéristique :

Définition

On définit la fonction caractéristique de la v.a. X, par :

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = \begin{cases} \sum_x e^{itX} P(X = x) & \text{si} \quad X \quad \text{est discrete;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx & \text{si} \quad X \quad \text{est continue} \end{cases}$$

Comme $|e^{itx}| = 1$ pour tout réel t, par exemple, si X est une variable aléatoire absolument continue, l'intégrale

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

existe pour toute fonction de densité f et la fonction caractéristique peut être définie pour toute variable aléatoire X.

Propriétés :

1. $\varphi_X(0) = 1$.
2. $|\varphi_X(t)| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Si $Y = aX + b$, a et b étant des constantes, alors

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(at)e^{ibt},$$

   où φ_X et φ_Y sont les fonctions caractéristiques des variables aléatoires X et Y.
4. $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

Preuves :

1. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet : $\varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
2. On montre la propriété pour X absolument continue. En effet : $|\varphi(t)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
3. $\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}E(e^{itaX}) = e^{itb}\varphi_X(at)$.
4. $\varphi(-t) = E[e^{-itX}] = E(\cos tX) - iE(\sin tX) = \overline{E[\cos(tx)] + iE[\sin(tx)]} = \overline{E[\cos(tx) + i\sin(tx)]} = \overline{E[e^{itX}]} = \overline{\varphi(t)}$

Théorème 1 :

Soit X la v.a. de fonction de répartition $F(x)$ et de fonction caractéristique $\varphi_X(t)$. Alors $\varphi_X(t)$ est uniformèment continue sur $\mathbb{R}$

Preuve :

On considère la différence :

$\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\left(e^{ixh} - 1\right) dF(x)$

ce qui entraîne $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ixh} - 1| dF(x)$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire, choisissons A suffisamment grand pour que $\int_{|x|>A} dF(x) < \frac{\varepsilon}{4}$ et choisissons h assez petit de manière que pour $|x| < A$ on ait : $|e^{ixh} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ Alors on a :

$|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| \leq \int_{-A}^{A} |e^{ixh} - 1| dF(x) + 2\int_{|x|\geq A} dF(x) < \varepsilon$

car $|e^{ixh} - 1| \leq |e^{ixh}| + |1| \leq 1 + 1 = 2$

Théorème 2 :

Si le moment d'odre $k \geq 1$ de la v.a. X existe, la fonction caractéristique $\varphi_X(t)$ admet une dérivée d'odre k continue au voisinage de l'origine et $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k E(X^k)$.

<u>Preuve :</u> On sait que :

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

on constate que pour tout nombre réel t, on a :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{itx} dF(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k dF(x) < \infty \quad \text{(par hypothèse)}$$

On peut donc dériver à l'ordre k sous le signe somme l'intégrale qui définit $\varphi(t)$ et écrire, pour tout nombre réel t l'expression

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k(e^{itx})}{dt^k} dF(x) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF(x)$$

Théorème 2 :

Preuve :(Suite)
Cette dérnière intégrale est donc absolument convergente ; elle est uniformément convergente en t.
L'intégrale obtenue est la dérivée d'ordre k de $\varphi(t)$ et enfin cette intégrale est continue en t. On a donc :

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} dF(x)$$

la limite pour $t = 0$ est $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) = i^k E(X^k)$.

Exemples :

Exemple 1 :

On considère X une v.a. qui suit une loi binomiale $B(n,p)$. À partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.

On a :

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{iuk} C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{iu})^k (1-p)^{(n-k)} = \left(pe^{iu} + (1-p)\right)^n.$$

Exemple 1 :

La dérivée $\varphi'(u)$ s'écrit

$$\varphi'(u) = n\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-1} ipe^{iu};$$

d'où $\quad E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = np.$

La dérivée seconde est

$$\varphi''(u) = -npe^{iu}\left(pe^{iu} + (1-p)\right)^{n-2}\left(npe^{-iu} + (1-p)\right);$$

et $E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = -\left[-n(n-1)p^2 - np\right] = n(n-1)p^2 + np.$

La variance $Var(X)$ est donc $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Exemple 2 :

On considère X une v.a. qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. À partir de sa fonction caractéristique on calculera son espérance mathématique et sa variance.

On a :

$$\varphi(u) = E(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{iu})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{iu}}$$

$$\varphi(u) = \exp\left(\lambda(e^{iu} - 1)\right)$$

La dérivée $\varphi'(u)$ s'écrit $\varphi'(u) = \lambda i e^{iu} \exp\left(\lambda(e^{iu} - 1)\right)$;

$$\text{d'où} \qquad E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \lambda.$$

Exemple 2 :

La dérivée $\varphi''(u)$ s'écrit :

$$\varphi''(u) = -\lambda i e^{iu} \exp(\lambda(e^{iu}-1)) - \lambda i e^{iu} \lambda i e^{iu} \exp(\lambda(e^{iu}-1))$$

$$= -\lambda i e^{iu} \exp(\lambda(e^{iu}-1)) - (\lambda i e^{iu})^2 \exp(\lambda(e^{iu}-1));$$

d'où

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = -(-\lambda - \lambda^2) = \lambda^2 + \lambda$$

La variance $Var(X)$ est donc

$$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Exemples :

Exemple 3 :

On considère X une v.a. qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une v.a. qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. À partir de la fonction caractéristique de X, on calculera la fonction caractéristique de Y et on en retrouvra l'espérance mathématique et la variance de Y.

On a :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux - \frac{x^2}{2}} dx$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin u\, x\, dx = 0,$$

alors :

$$\varphi_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos u\, x\, dx$$

et

$$\varphi'_X(u) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} \sin u\, x\, dx$$

Une intégration par partie donne

$$\varphi'_X(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin u\, x\, d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

donc

$$\varphi'_X(u) = -u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos u\, x\, dx = -u\varphi_X(u)$$

On en tire $\frac{\varphi'_X(u)}{\varphi_X(u)} = -u$ ou $[\ln \varphi_X(u)]' = -u$
Ce qui implique

$$\ln \varphi_X(u) = \frac{-u^2}{2} + c.$$

Comme $\varphi_X(0) = 1$, on a $c = 0$ et $\varphi_X(u) = e^{\frac{-u^2}{2}}$.

Si $Y \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$, on peut représenter Y sous la forme $Y = \sigma X + m$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$; d'où

$$\varphi_Y(u) = \varphi_{\sigma X+m}(u) = e^{ium} e^{\frac{-u^2\sigma^2}{2}}$$

La dérivée $\varphi'_X(u)$ s'écrit

$$\varphi'_Y(u) = (im - u\sigma^2) e^{ium} e^{\frac{-u^2\sigma^2}{2}}$$

et $E(Y) = \frac{1}{i}\varphi'_Y(0) = m$.
La dérivée $\varphi''_Y(u)$ s'écrit

$$\varphi''_Y(u) = -\sigma 2 e^{ium - \frac{u^2\sigma^2}{2}} + (im - u\sigma^2)^2 e^{ium - \frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

et $E(Y^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''_Y(0) = -(-\sigma^2 + i^2 m^2) = \sigma^2 + m^2$
La variance $Var(Y)$ est donc $Var(Y) = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2$

On a vu que, pour la fonction génératrice des moments $M(t)$, on a :

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \frac{(t)^k}{k!}$$

On a un résultat pareil pour la fonction caractéristique $\varphi(t)$ qui découle du théorème précèdent :

Corollaire :

Si les n premiers moments de X, $m_k = E[X^k] (k = 1, 2, \cdots, n)$ existent, alors on a pour $t \to 0$,

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} m_k + o(t^n)$$

Preuve : Elle résulte immédiatement du théorème précèdent

Exemple 4 :

Soit X une v.a. uniforme sur $]a, a+b[$ de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } a < x < a+b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculons sa fonction caractéristique et en déduire ses moments.

$$\varphi(t) = \frac{1}{b}\int_a^{a+b} e^{itx}dx = \frac{1}{ibt}\left(e^{i(a+b)t} - e^{iat}\right)$$

$$= \frac{1}{ibt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\left[(a+b)^n - a^n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(it)^{n-1}}{n!}\frac{(a+b)^n - a^n}{b} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}\frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{b(n+1)}$$

Exemple 4 :

En vertu de corollaire, on a :

$$m_n = \frac{(a+b)^{n+1} - a^{n+1}}{b(n+1)}; n = 0, 1, 2, \cdots$$

Calculs des moments des lois usuelles :

Pour calculer l'espérance, la variance et les moments d'ordre supérieurs, on peut utiliser :

- la méthode directe (définition de ces moments)
- la fonction génératrice
- la fonction génératrice des moments
- la fonction caractéristique

Calculs des moments des lois usuelles :

Nous avons déjà calculé l'espérance et la variance pour les lois :

- binomiale, en utilisant sa fonction caractéristique
- de Poisson, en utilisant la fonction génératrice et aussi la fonction caractéristique
- normale centrée réduite et la normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, en utilisant la fonction caractéristique
- uniforme sur l'intervalle $]a, a+b[$, en utilisant la fonction caractéristique et son dévellopement en série.

Soit a un nombre fixé. Soit X une v.a. prenant la valeur a avec $P(X = a) = 1$ et suivant la loi de Dirac au point a. Sa loi de probabilité δ_a est :

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \sum_x e^{itx}\delta_a(x) = e^{ita}\delta_a(a) = e^{ita}$$

de dérivée $\varphi'(t) = iae^{ita}$ et de dérivée seconde $\varphi''(t) = -a^2e^{ita}$ donc son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = a$$

et $E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = a^2$, doù sa variance est :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a^2 - a^2 = 0$$

Loi de Bernoulli :

Soit une v.a. X qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \ \ (0 \leq p \leq 1)$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = \sum_x P(X = x)e^{itx} = pe^{it} + (1 - p)e^0 = pe^{it} + (1 - p)$$

de dérivée première $\varphi'(t) = ipe^{it}$ et de dérivée seconde $\varphi''(t) = -pe^{it}$.
Donc son espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = p$ et $E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = p$.
D'où sa variance est : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

Loi géométrique (1) :

Soit une v.a. X qui suit une loi géométrique de paramètre p avec

$$\forall k \in X(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1};$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = p \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk}(1-p)^{k-1} = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$

On peut calculer sa dérivée première et sa dérivée seconde et déduire son espérance mathématique $E(X) = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \frac{1}{p}$.
De même, on peut calculer $E(X^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$ et déduire $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$.

Loi géométrique (2) :

On peut consiérer la loi géométrique de paramètre p, mais avec $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ qui commence par 0 et non pas 1, alors

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X = k) = p(1-p)^k;$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = E(e^{itX}) = p \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}(1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$$

Dans ce cas, on trouve après avoir calculer les dérivées première et seconde de cette fonction caractéristique, l'espérance mathématique $E(X) = \frac{1-p}{p}$ et la variance $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Loi binomiale négative (1) :

Une v.a. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p et on note $X \sim NB(n, p)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*; \quad P(X = k) = C_{k+n-2}^{k-1} p^n (1-p)^{k-1};$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}} \right)^n; \quad \text{pour} \quad |(1-p)e^{it}| < 1$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{n}{p}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{n}{p^2}(1-p)$$

Pour $n = 1$, on retrouve la loi géométrique (1).

Loi binomiale négative (2) :

Une v.a. X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p et on note $X \sim NB(n,p)$ si

$$\forall k \in X(\Omega) = \mathbb{N}; \quad P(X = k) = C_{k+n-1}^{k} p^n (1-p)^k;$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}} \right)^n ; \quad \text{pour} \quad |(1-p)e^{it}| < 1$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = n \frac{1-p}{p}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{n}{p^2}(1-p)$$

Pour $n = 1$, on retrouve la loi géométrique (2).

Loi multinomiale :

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$ suit une loi multinomiale de paramètres $n, p_1, p_2, \cdots, p_m$ si

$$P(X_1 = n_1, \cdots, X_m = n_m) = \frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2}, \cdots, p_m^{n_m}$$

où $\sum_{i=1}^m n_i = n$ Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \cdots, t_m) = \left(\sum_{k=1}^m p_k e^{it_k} \right)^m$$

L'espérance mathématique d'une composante X_i est :

$$E(X_i) = np_i; \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

Sa variance est :

$$Var(X_i) = np_i(1 - p_i); \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

Une v.a. continue X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Loi exponentielle :

Une v.a. continue X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Une v.a. continue X suit une loi gamma de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$.
Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Si $\alpha = 1$, on retrouve la loi exponentielle $\mathcal{E}xp(\beta)$.

Loi bêta :

Une v.a. continue X suit une loi bêta de paramètres $\alpha, \beta > 0$ et on note $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ si sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Loi de Laplace :

Une v.a. X suit une loi de Laplace de paramétres α et $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}; \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \frac{\lambda^2 e^{it\alpha}}{t^2 + \lambda^2}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = \alpha$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Loi de Cauchy :

Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètres α et $\lambda > 0$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\alpha)^2}; \qquad x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \exp\left(i\alpha t - \lambda|t|\right)$$

Loi normale :

Une v.a. X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma > 0$ et on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ si sa densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = \exp\left(imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = m$$

Sa variance est :

$$Var(X) = \sigma^2$$

Loi normale centrée réduite :

Une v.a. X suit une loi normale centrée réduite s'il suit une loi normale de paramètre $m = 0$ et $\sigma = 1$ et on note $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}}; \quad x \in]-\infty, +\infty[$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = 0$$

Sa variance est :

$$Var(X) = 1$$

Loi du Khi-deux :

Une v.a. X suit une loi de Khi-deux avec n degrés de liberté si sa densité est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Sa fonction caractéristique est :

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

Son espérance mathématique est :

$$E(X) = n$$

Sa variance est :

$$Var(X) = 2n$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Formule d'inversion :

Soit F la fonction de répartition d'une v.a. et soit φ sa fonction caractéristique.
Nous nous proposons d'exprimer F à partir de φ.

Théorème général :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(b+0) + F(b-0)\right] - \frac{1}{2}\left[F(a+0) + F(a-0)\right]$$

$$\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\right| = |\varphi(t)|\left|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\right| \leq b-a$$

Donc, en vertu du **théorème de Fubini**, on peut permuter les opérateurs d'intégration et écrire :

$$I_T = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}e^{itx}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dF(x)\int_{-T}^{T}\frac{e^{-it(x-a)}-e^{-it(x-b)}}{it}dt$$

$$\text{Or,} \qquad J_T = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it(x-a)} - e^{-it(x-b)}}{it} dt =$$

$$= \int_{-T}^{T} \frac{\cos t(x-a) - \cos t(x-b)}{it} dt - i \int_{-T}^{T} \frac{\sin t(x-a) - \sin t(x-b)}{it} dt$$

$$= 2 \left[\int_{0}^{T} \frac{\sin t(x-a)}{t} dt - \int_{0}^{T} \frac{\sin t(x-b)}{t} dt \right]$$

$$= 2 \left[\int_{0}^{T(x-a)} \frac{\sin u}{u} du - \int_{0}^{T(x-b)} \frac{\sin u}{u} du \right]$$

L'intégrale de Dirichlet $S(v) = \int_0^v \frac{\sin u}{u} du$ est telle que $S(v) \longrightarrow_{v \to \pm\infty} \pm \frac{\pi}{2}$

Nous avons donc : $$J_T = 2\left[S(T(x-a)) - S(T(x-b))\right].$$

D'autre part $$I_T = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\left[S(T(x-a)) - S(T(x-b))\right] dF(x).$$

$$I_T = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{a-0} J_T dF(x) + \int_{a-0}^{a+0} J_T dF(x) + \int_{a+0}^{b-0} J_T dF(x) + \right.$$
$$\left. + \int_{b-0}^{b+0} J_T dF(x) + \int_{b+0}^{\infty} J_T dF(x)\right]$$

- Si $x < a < b$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-\infty}^{a-0} J_T dF(x) = 0.$$

- Si $x = a < b$, on a :

$$S(T(x-a)) = 0, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{a-0}^{a+0} J_T dF(x) = \pi\left[F(a+0) - F(a-0)\right]$$

- Si $a < x < b$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{a+0}^{b-0} J_T dF(x) = 2\pi \left[F(b-0) - F(a+0)\right]$$

- Si $a < x = b$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) = 0.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{b-0}^{b+0} J_T dF(x) = \pi \left[F(b+0) - F(b-0)\right]$$

- Si $a < b < x$, on a :

$$S(T(x-a)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}, S(T(x-b)) \longrightarrow_{T\to\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\lim_{T\to\infty} \int_{b+0}^{\infty} J_T dF(x) = 0$$

En résumé :

$$\lim_{T\to\infty} I_T = \frac{1}{2\pi}\left[\pi(F(a+0)-F(a-0)) + \right.$$

$$\left. 2\pi(F(b-0)-F(a+0)) + \pi(F(b+0)-F(b-0))\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(b+0)+F(b-0)\right] - \frac{1}{2}\left[F(a+0)+F(a-0)\right] \blacksquare$$

Corollaire 1 :

Si a et b sont deux points de continuité de F. On a :

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

Formule d'inversion (Paul-Levy)

Corollaire 2 :

Si φ est **absolument intégrable**, la fonction de répartition F est dérivable dans $\mathbb{R}$ et de plus

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

(Formule de réciprocité de Fourier)

<u>Preuve :</u>

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{-it(x+h)}}{ith} \varphi(t) dt$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1-e^{-ith}}{ith} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

$$\text{Or,} \quad \left| \frac{1-e^{-ith}}{ith} e^{-itx}\varphi(t) \right| \leq |\varphi(t)|$$

et puisque, par hypothèse $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|dt < \infty$, on peut en vertu de théorème de Lebesgue, passer à la limite sous l'opérateur d'intégration et on a :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{1-e^{-ith}}{ith} e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-ith}}{ith} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

Détermination d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ par sa fonction caractéristique :

Preuve de la Formule de réciprocité de Fourier :

$$\begin{aligned} F'(x) = f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-ith}}{ith} e^{-itx}\varphi(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est absolument convergente en x : C'est une fonction continue en x.
Donc, la v.a. correspondante à $F(x)$ est absolument continue, de densité f. ■

Exemple

Trouvons la densité de la v.a. dont la fonction caractéristique est $\varphi(t) = e^{-c|t|}$.

En effet, puisque $\varphi(t)$ est absolument intégrable, la distribution est absolument continue avec la densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-c|t|}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(c-ix)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-t(c+ix)}dt$$

Les fonctions à intégrer sont holomorphes, donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi(c-ix)}\left[e^{t(c-ix)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi(c+ix)}\left[e^{-t(c+ix)}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{c-ix} + \frac{1}{c+ix}\right] = \frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$$

Théorème :

Si deux fonctions de répartitions correspondent à la même fonction caractéristique, alors elles sont égales.

i.e. $$\varphi_{F_1} = \varphi_{F_2} \Longrightarrow F_1 = F_2$$

La fonction caractéristique d'une v.a. détermine la loi de cette variable. Autrement dit, si deux v.a. admettent même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

Proposition :

Soit $\varphi_X(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. X et $\varphi_Y(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. Y.

X et Y ont même loi si, et seulement si $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$.

Fonction caractéristique et indépendance :

Théorème :

Soit (X, Y) un couple de v.a. indépendantes. Alors, pour tout réel t, on a :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

Preuve :

En effet, $\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}e^{itY})$, d'où, puisque X et Y sont indépendantes, donc aussi e^{itX} et e^{itY} :

$$\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{itX})E(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

On peut généraliser le théorème précédent de la façon suivante :

Théorème :

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes. Alors, pour tout réel t, on a :

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \Pi_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$$

Remarque :

On peut trouver des v.a. X et Y non indépendantes qui vérifient, quand même, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Contre-exemple :

Soit X une v.a. de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$; sa fonction caractéristique est donnée par $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$. Le couple (X, Y), où $Y = X$ vérifie :
$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = (e^{-|t|})^2 = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Corollaire :

Le produit de deux fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique.