Université Abdelmalek Essaâdi | **Année universitaire : 2019/2020**
Faculté des Sciences de Tétouan | **S.M.A. Semestre 6**

T.D. de Probabilités 2
Série n° 4

Exercice 1 :
Soit X une v.a. discrète de loi donnée par : $P(X = j) = p_j; j = 0, 1, 2, \cdots$ et on donne $P(X > j) = q_j; j = 0, 1, 2, \cdots$. On considère $Q(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j$; en tenant compte que la série de somme $Q(s)$ converge pour $|s| < 1$.

1. Montrer que $Q(s) = \frac{1-G(s)}{1-s}$ pour $|s| < 1$ où $G(s)$ est la fonction génératrice de X.
2. Trouver la moyenne et la variance de X en fonction de Q et ses dérivées.

Exercice 2 :
Trouver la fonction génératrice des moments sachant que les moments de la distribution sont données par $m_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 3 :
Soient les fonctions de densité :

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Trouver les fonctions caractéristiques, les fonctions génératrices des moments et les moments puis calculer les quatre premiers moments centrés

Exercice 4 :
Montrer que la v.a. X qui a pour fonction caractéristique $\varphi_X(t) = e^{-|t|}, \forall t \in \mathbb{R}$, suit une loi de Cauchy.

Exercice 5 :

1. Calculer la fonction caractéristique d'une v.a. qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ et en déduire ses moments.
2. Calculer la fonction caractéristique d'une v.a. qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et en déduire ses moments. Retrouver les moments d'une v.a. normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exercice 6 :
Montrer que la loi de X est symétrique (X et $-X$ ont la même loi) si, et seulement si, la fonction caractéristique de X est réelle ($\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).

Exercice 7 :
Donner la fonction caractéristique de X :

1. Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$;
2. Si X suit une loi Binomiale de paramètres (n, p) ;

3. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ ;
4. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;
5. Si X suit une loi exponentielle symétrique de paramètre λ (i.e. de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$) ;
6. Si X suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si X a pour densité $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$. (Indication : on pourra utiliser la question précèdente).

Exercice 8 :
Trouver les lois correspondantes aux fonctions caractéristiques suivantes :

1. $\varphi_1(t) = \exp\left(e^{it} - 1\right)$
2. $\varphi_2(t) = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^4$

Exercice 9 :
Montrer, en utilisant la fonction caractéristique, que dans chaque fois X et Y sont deux v.a. indépendantes :

1. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.
2. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
3. Si $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors $X + Y \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$
4. Si X et Y ont pour densités respectives f_X et f_Y, alors $X + Y$ a pour densité $f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u - v)f_Y(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(v)f_Y(u - v)dv$