Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
S.M.A.
Semestre 6

Corrigés du Contrôle de Probabilités 2

Durée: 1h

Exercice 1 :

1. (a)
$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n\geqslant 1}(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)$$
alors la suite d'événements $(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)_n$ est croissante et $\liminf_n A_n = \lim_n(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)$.
On a donc $P(\liminf_n A_n) = P(\lim_n(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)) = \lim_n P(\bigcap_{k\geqslant n} A_k) = \liminf_n P(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)$.
Or $\forall n \geqslant 1$, on a : $(\bigcap_{k\geqslant n} A_k) \subset A_n$
d'où $P(\bigcap_{k\geqslant n} A_k) \leqslant P(A_n)$. Prenons la limite inférieure des deux côtés, on a :
$\liminf_n P(\bigcap_{k\geqslant n} A_k) \leqslant \liminf_n P(A_n)$
Il en résulte : $P(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n P(A_n)$

   (b)
$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n\geqslant 1}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)$$
alors la suite d'événements $(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)_n$ est décroissante et $\limsup_n A_n = \lim_n(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)$.
On a donc $P(\limsup_n A_n) = P(\lim_n(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)) = \lim_n P(\bigcup_{k\geqslant n} A_k) = \limsup_n P(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)$.
Or $\forall n \geqslant 1$, on a : $A_n \subset (\bigcup_{k\geqslant n} A_k)$
d'où $P(A_n) \leqslant P(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)$. Prenons la limite supérieure des deux côtés, on a :
$\limsup_n P(A_n) \leqslant \limsup_n P(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)$
Il en résulte : $\limsup_n P(A_n) \leqslant P(\limsup_n A_n)$

2. (a) $B - \liminf_n A_n = B - \bigcup_{n\geqslant 1}(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)$
$= B \bigcap [\bigcup_{n\geqslant 1}(\bigcap_{k\geqslant n} A_k)]^c$
$= B \bigcap [\bigcap_{n\geqslant 1}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k^c)]$
$= \bigcap_{n\geqslant 1}[B \bigcap (\bigcup_{k\geqslant n} A_k^c)]$
$= \bigcap_{n\geqslant 1}[\bigcup_{k\geqslant n}(B \bigcap (A_k^c)]$
$= \bigcap_{n\geqslant 1}[\bigcup_{k\geqslant n}(B - A_k)]$
$= \limsup_n (B - A_n)$

   (b) $B - \limsup_n A_n = B - \bigcap_{n\geqslant 1}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)$
$= B \bigcap [\bigcap_{n\geqslant 1}(\bigcup_{k\geqslant n} A_k)]^c$
$= B \bigcap [\bigcup_{n\geqslant 1}(\bigcap_{k\geqslant n} A_k^c)]$
$= \bigcup_{n\geqslant 1}[B \bigcap (\bigcap_{k\geqslant n} A_k^c)]$
$= \bigcup_{n\geqslant 1}[\bigcap_{k\geqslant n}(B \bigcap (A_k^c)]$
$= \bigcup_{n\geqslant 1}[\bigcap_{k\geqslant n}(B - A_k)]$
$= \liminf_n (B - A_n)$

Exercice 2 :

1. Pour tout réels $x, x_1, \cdots, x_n$, on a l'équivalence

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \leqslant x \Longleftrightarrow \forall i, x_i \leqslant x.$$

   On en déduit l'égalité des évènements

$$\{M_n \leqslant x\} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \{X_i \leqslant x\},$$

   et, les variables X_i étant indépendantes, on obtient

$$P\{M_n \leqslant x\} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} P\{X_i \leqslant x\} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i(x)$$

2. Pour le min des X_i, l'équivalence

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i > x \Longleftrightarrow \forall i, x_i > x$$

   donne l'égalité des évènements

$$\{m_n > x\} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \{X_i > x\},$$

   puis

$$P\{m_n \leqslant x\} = 1 - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} P\{X_i > x\} = 1 - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (1 - F_i(x)).$$

3. De même pour l'évènement $\{x_1 < m_n \leqslant M_n \leqslant x_2\}$, on a :

$$\{x_1 < m_n \leqslant M_n \leqslant x_2\} = \{x_1 < m_n\} \cap \{M_n \leqslant x_2\} = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \{x_1 < X_i \leqslant x_2\}.$$

   D'où, par l'indépendance des X_i,

$$P(x_1 < m_n \leqslant M_n \leqslant x_2) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(F_i(x_2) - F_i(x_1)\right).$$

Exercice 3 :

1. On a :
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx-\frac{x^2}{2}} dx$$
Il y a plusieurs méthodes pour calculer cette intégrale :
Première méthode est la méthode vue dans le cours :
Comme
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \sin t\, x\, dx = 0,$$
alors :
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos t\, x\, dx$$
et
$$\varphi'_X(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} \sin t\, x\, dx$$
Une intégration par partie donne
$$\varphi'_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\, x\, d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$
donc
$$\varphi'_X(t) = -t\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos t\, x\, dx = -t\varphi_X(t)$$
On en tire $\frac{\varphi'_X(t)}{\varphi_X(t)} = -t$ ou $[\ln \varphi_X(t)]' = -t$
Ce qui implique
$$\ln \varphi_X(t) = \frac{-t^2}{2} + c.$$
Comme $\varphi_X(0) = 1$, on a $c = 0$ et $\varphi_X(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$.
Deuxième méthode est la méthode vue en T.D., on a $\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2n}}{2n!} \frac{(2n)!}{2^n n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$
Le calcul de l'intégrale $I_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ se fait par récurrence sur n (I_{2n-1} est nulle puisque c'est l'intégrale sur $\mathbb{R}$ d'une fonction impaire).
Pour justifier l'interversion de la somme et de l'intégrale, il suffit de vérifier que l'intégrale :
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|itx|^n}{n!} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|tx|} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

est finie. Mais,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|tx|}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{|t|x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} e^{\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}(x-|t|)^2}dx \leqslant 2e^{\frac{t^2}{2}}$$

Troisième méthode : Un argument d'intégrabilité permet de montrer comme précédemment que la fonction $g(z)$ d'une variable complexe z définie par :

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

est développable en série entière de rayon de convergence infini. Or $g(z)$ se calcule aisément par un changement de variable réelle si z est réel. En effet, on a, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{z^2}{2}}e^{-\frac{(x-z)^2}{2}}dx = e^{\frac{z^2}{2}}$$

Les deux fonctions analytiques $g(z)$ et $e^{-\frac{z^2}{2}}$ sont égales pour toute valeur réelle de z. Elles sont donc égales sur $\mathbb{C}$, d'où en particulier pour $z = it$ avec t réel :

$$\varphi_X(t) = g(it) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

2. Si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, on peut représenter Y sous la forme $Y = \sigma X + m$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$; d'où

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\sigma X+m}(t) = e^{itm}e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}}$$

La dérivée $\varphi'_Y(t)$ s'écrit

$$\varphi'_Y(t) = (im - t\sigma^2)e^{itm}e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}}$$

et $E(Y) = \frac{1}{i}\varphi'_Y(0) = m$.
La dérivée $\varphi''_Y(t)$ s'écrit

$$\varphi''_Y(t) = -\sigma 2e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2}} + (im - t\sigma^2)^2e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

et $E(Y^2) = \frac{1}{i^2}\varphi''_Y(0) = -(-\sigma^2 + i^2m^2) = \sigma^2 + m^2$
La variance $Var(Y)$ est donc $Var(Y) = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2$

3. Soit $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, indépendantes, alors

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t) = e^{itm_1-\sigma_1^2t^2/2}e^{itm_2-\sigma_2^2t^2/2} = e^{it(m_1+m_2)-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$$

et comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$