Prob & stat MAI S_3 2019-2020

Série 2

EX 1 : **Remarque** : les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in ([0, +\infty[)^2$.
   Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent des lois de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
2. Soit $p \in [0,1]$. Soit $\lambda \in [0, +\infty[$.
   Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   On suppose que $X(\Omega) = \mathbf{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = m)$ est une loi binomiale de paramètre (m, p).
   Déterminer la loi de X.

EX 2 : Soit $N \in \mathbf{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant « le plus petit élément de ».
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

EX 3 : Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbf{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

EX 4 : X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbf{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall k \in \mathbf{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
   On admet que $V(\Omega) = \mathbf{N}$ et que, $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique.
   En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

EX 5 :

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

   Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

EX 6 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$.
On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
$\forall (i, j) \in \mathbf{N}^2$, $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.

EX 7 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbf{N}$.
   On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.
   (a) Prouver que $R_X \geqslant 1$.
   On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
   Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.
   Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.
   (b) Soit $k \in \mathbf{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
   (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.