Chapitre 0: Suites infinies d'événements

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
https://elmerouani.jimdofree.com/calcul-des-probabilités

2020/2021

Plan

- Limites de suites d'événements
- Limite inférieure et limite supérieure
- Inégalités de Fatou
- Lemme de Borel-Cantelli
- Exercices

Limites de suites d'événements :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements.
La réunion $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ est l'événement "l'un au moins des A_n se réalise".

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega / \exists n \geq 1 : \omega \in A_n\}$$

De même l'intersection $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est l'événement "tous les A_n se réalisent".

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega / \forall n \geq 1 : \omega \in A_n\}$$

La suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est croissante, c'est-à-dire si l'on a $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \geq 1$, la réunion $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ est aussi appelée la limite de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$. On écrit alors $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_n A_n$.
De même si la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, c'est-à-dire si l'on a $A_{n+1} \subset A_n, \forall n \geq 1$, l'intersection $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ est aussi appelée la limite de la suite $(A_n)_{n\geq 1}$. On écrit alors $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_n A_n$.
Lorsqu'une suite $(A_n)_n$ est ou bien croissante, ou bien décroissante, on dit qu'elle est monotone.

Limite inférieure et limite supérieure :

Étant donnée une suite $(A_n)_n$ d'événements, on définit :
La limite inférieure de la suite $(A_n)_n$ comme l'ensemble, noté $\liminf_n A_n$, de tous les éléments ω de Ω qui appartiennent à tous les A_n sauf à un nombre fini d'entre eux :

$$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ sauf pour un nombre fini de } n\}$$

$$\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{m \geq n} A_m$$

Dire que ω appartient à tous les A_n sauf à un nombre fini, c'est-à-dire qu'à partir d'un rang n, il appartient à l'intersection $B_n = \bigcap_{m \geq n} A_m$. Par conséquent, il existe un entier n tel que $\omega \in B_n$, ce qui prouve l'égalité.

Limite inférieure et limite supérieure :

Étant donnée une suite $(A_n)_n$ d'événements, on définit :
La limite supérieure de la suite $(A_n)_n$ comme l'ensemble, noté $\limsup_n A_n$, de tous les éléments ω de Ω qui appartiennent à tous les A_n pour une infinité d'indices n :

$$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } A_n\}$$

$$\limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} A_m$$

Le fait que l'élément ω appartient à une infinité de A_n veut dire qu'aussi loin qu'on peut aller dans la suite des entiers, disons à l'indice n, cet élément appartient toujours à la réunion $C_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$. Par conséquent, ω appartient à l'intersection de la suite (C_n). Ce qui établit la seconde identité.

Limite inférieure et limite supérieure :

On a évidement $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$
car si ω appartient à $\liminf_n A_n$, il appartient à tous les A_n à partir d'un certain rang, donc à une infinité d'événements A_n.

Remarque :

$$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega : \sum_n \mathbb{I}_{A_n^c} < +\infty\}$$

$$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega : \sum_n \mathbb{I}_{A_n} = +\infty\}$$

Indicatrice d'un événement :

L'indicatrice $\mathbb{I}_A$ d'un événement A est une fonction sur Ω dans la paire $\{0, 1\}$ définie par :

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A \end{cases}$$

Limite inférieure et limite supérieure :

Posons $A_* = \liminf_n A_n$ et $A^* = \limsup_n A_n$. On vérifie immédiatement les relations : $(A_*)^c = \limsup_n A_n^c$ et $(A^*)^c = \liminf_n A_n^c$.

Définition :

Si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$, on dit que la suite $(A_n)_n$ a une limite et on écrit : $\lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$.
On dit que la suite $(A_n)_n$ tend vers $A = \lim_n A_n$ ou converge vers A.

Proposition :

Lorsque la suite $(A_n)_n$ est monotone, les relations
$\lim_n A_n = \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$ sont vérifiées.

Preuve :

Limites inférieures et limite supérieure :

Preuve :

- Si $(A_n)_n$ est croissante, alors $\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = A_n$
  d'où $\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_n A_n$.
  D'autre part, pour tout $n \geq 1$, on a : $\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$.
  D'où $\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \lim_n A_n$.
- Comme la proposition est vraie pour les suites croissantes, elle est aussi vraie pour les suites décroissantes, par application des relations :
  $(A_*)^c = \limsup_n A_n^c$ et $(A^*)^c = \liminf_n A_n^c$. ■

Rappels :

Proposition :

Soit $(A_n)_n$ une suite monotone d'événements, alors
$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$.

Preuve :

• Si $(A_n)_n$ est décroissante, notons $\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = B$.
Comme $A_{n+1} \subset A_n$; $\forall n \geq 1$, les événements $\Omega - A_1$; $A_1 - A_2$;
$A_2 - A_3$; $\cdots$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion vaut B^c
d'où $P(B^c) = P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_3) + \cdots$
On peut écrire
$P(B^c) = \lim_n [P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + \cdots + P(A_{n-1} - A_n)]$
Comme $(\Omega - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) = A_n^c$
On en déduit $P(B^c) = \lim_n P(A_n^c)$
i.e. $1 - P(B) = 1 - \lim_n P(A_n)$
d'où $P(B) = \lim_n P(A_n)$

Rappels :

Preuve :(suite)

- Si $(A_n)_n$ est croissante, notons $\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$.

Comme $A_n \subset A_{n+1}; (\forall n \geq 1)$, on a :

$A = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots$

Alors $P(A) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \cdots$ (car les événements $A_1; (A_2 - A_1); (A_3 - A_2); \cdots$ sont deux à deux incompatibles) et

$P(A) = \lim_n [P(A_1) + P(A_2 - A_1) + \cdots + P(A_n - A_{n-1})]$

$= \lim_n P(A_n)$ (car $A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup \cdots \cup (A_n - A_{n-1})$ ■

Inégalités de Fatou :

Proposition :

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements associés à un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors, on a les "inégalités de Fatou" :

1. $P(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n P(A_n)$
2. $\limsup_n P(A_n) \leq P(\limsup_n A_n)$

Preuve :

Démontrons la première des inégalités. On pose :
$A_* = \liminf_n A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ et $B_n = \bigcap_{k\geq n} A_k$ $(n \geq 1)$.
Alors (B_n) est une suite croissante et $A_* = \lim_n B_n$.
On a donc : $P(A_*) = P(\lim_n B_n) = \lim_n P(B_n)$
Or pour tout $n \geq 1$, on a : $B_n \subset A_n$, d'où $P(B_n) \leq P(A_n)$.

Inégalités de Fatou :

Preuve : (suite)
Prenons la limite inférieure des deux côtés et remarquons que, la suite (B_n) étant croissante, on a : $\liminf_n P(B_n) = \lim P(B_n) = P(A_*)$.
Il en résulte : $P(A_*) \leq \liminf_n P(A_n)$ **(c.q.f.d.)**

Exemple :
Prenons $\Omega = \{-1, +1\}$
$P(\{-1\}) = \frac{1}{4}$; $P(\{+1\}) = \frac{3}{4}$
$A_n = \{(-1)^n\}$
Alors $\liminf_n A_n = \emptyset$; $\limsup_n A_n = \Omega$
$\liminf_n P(A_n) = \frac{1}{4}$; $\limsup_n P(A_n) = \frac{3}{4}$
D'où les inégalités de Fatou sont vérifiées.

Remarque :

Dans le cas où la suite est convergente, les inégalités de Fatou montrent que la suite numérique $(P(A_n))_{n\geq 1}$ admet une limite (au sens usuel) et que l'on a : $P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$.

Lemme de Borel-Cantelli :

Lemme :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements

1. Si $\sum_n P(A_n) < +\infty$, alors $P(\limsup_n A_n) = 0$.
2. Si les A_n sont indépendantes et $\sum_n P(A_n) = +\infty$, alors $P(\limsup_n A_n) = 1$.

Preuve :

1. $\sum_n P(A_n) = \sum_n \int \mathbb{I}_{A_n} dP$
   $= \int \sum_n \mathbb{I}_{A_n} dP < +\infty$ (par hypothèse)
   $\Rightarrow \sum_n \mathbb{I}_{A_n} < +\infty$ p.s.
   $\Rightarrow P(\limsup_n A_n) = 0$ (d'après la remarque précèdente)
2. $P(\limsup_n A_n) = P(\lim_n \searrow \bigcup_{m\geq n} A_m)$
   $= \lim_n P(\bigcup_{m\geq n} A_m)$
   Montrons que $P(\bigcup_{m\geq n} A_m) = 1, \forall m$

Lemme de Borel-Cantelli :

Preuve : (suite)

$1 - P(\bigcup_{m\geq n} A_m) = P(\bigcap_{m\geq n} A_m^c)$

$= \lim_N \searrow P(\bigcap_{n\leq m\leq N} A_m^c)$

$= \lim_N \searrow \prod_{n\leq m\leq N} P(A_m^c)$ (par indépendance des A_m)

$= \lim_N \searrow \prod_{n\leq m\leq N}(1 - P(A_m))$

$\leq \lim_N \prod_{n\leq m\leq N} e^{-P(A_m)}$ (car $1 - x \leq e^{-x}$)

$\leq \lim_N e^{-\sum_{n\leq m\leq N} P(A_m)}$

≤ 0 car $\sum_n P(A_n) = +\infty$

d'où $P(\bigcup_{m\geq n} A_m) = 1$. ∎

Exercices :

Exercice 1 :

Montrer que pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \qquad \text{(Inégalité de Boole)}$$

Exercice 2 :

Soient A et B deux événements et $(A_n)_n$ une suite d'événements définie par $A_n = A$ ou B suivant que n est pair ou impair.
Montrer que $\liminf_n A_n = A \cap B$ et $\limsup_n A_n = A \cup B$.

Exercices :

Exercice 3 :

Soient A et B avec ou sans indices des événements. Vérifier les formules concernant les indicatrices :

1. $\mathbb{I}_\Omega \equiv 1$, $\mathbb{I}_\emptyset \equiv 0$.
2. $\mathbb{I}_A(\omega) \leq \mathbb{I}_B(\omega)$ pour tout ω dans Ω ssi $A \subset B$.
3. $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \mathbb{I}_B$; $\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_{A\cap B}$.
4. $\mathbb{I}_{A^c} = 1 - \mathbb{I}_A$; $\mathbb{I}_{A-B} = \mathbb{I}_A(1 - \mathbb{I}_B)$.
5. $\mathbb{I}_{A_*} = \liminf_n \mathbb{I}_{A_n}$ et $\mathbb{I}_{A^*} = \limsup_n \mathbb{I}_{A_n}$.

Exercice 1 :

Comme $A \cup B = A \cup (B - A)$
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$
comme $(B - A) \subset B$, alors $P(B - A) \leq P(B)$
par suite $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
et plus généralement $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$
Soit $A = \bigcup_n A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k$
Comme la suite $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est une suite croissante d'événements,
$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_n P(A_n)$
d'où $P(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P(A_n)$ (Inégalité de Boole)