Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
S.M.A. et S.M.I
Semestre 3

Rattrapage de Probabilité et Statistique

Durée : 1h30min

Exercice 1 : (6 points) — **Barème :**

Un joueur effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes ; puis on suppose que :

- Si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0,6
- Si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0,7

On note U_n la probabilité de gagner la $n^{\text{ème}}$ partie.

1) Donner une relation entre U_{n+1} et U_n. — 2 points
2) Donner U_n en fonction de n. — 2 points
3) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ — 2 points

Exercice 2 : (8 points)

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \quad |x| \leq k \\ 0 & si \quad |x| > k > 0 \end{cases}$$

1) Trouver la constante k. Dans la suite de l'exercice, on prend pour k la valeur trouvée. — 1 point
2) Calculer E(X) l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. — 2 points
3) Déterminer F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. — 2 points
4) Déterminer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $Y=X^2$ et calculer E(Y). — 3 points

Exercice 3 : (6 points)

Soit la série statistique suivante :

Classes	[0 ;5[	[5 ;10[	[10 ;12[	[12 ;20[
Effectifs	5	20	15	10

1) Dresser le tableau des fréquences et tracer la courbe de la fréquence cumulée. — 1 point
2) Calculer la moyenne arithmétique, le mode et la médiane de cette série statistique. — 3 points
3) Calculer sa variance et son écart-type. — 2 points

Corrections du rattrapage de Probabilités et statistique

Exercice 1 :

Soit G_n l'évènement « Gagner la partie n »,
et $U_n = P(G_n)$

1°) Formule des probabilités totales :

$$P(G_{n+1}) = P(G_{n+1}/G_n)\, P(G_n) + P(G_{n+1}/\overline{G_n}) \cdot P(\overline{G_n})$$

$$\Leftrightarrow \quad U_{n+1} = 0,6\, U_n + 0,3\,(1 - U_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{U_{n+1} = 0,3 U_n + 0,3}$$

2°) On a : $U_{n+1} = 0,3 U_n + 0,3$, Si on suppose que (U_n) converge vers une limite l, on aura :

$$l = 0,3\, l + 0,3 \quad \text{alors} \quad 0,7\, l = 0,3$$

$$\text{donc} \quad l = \frac{3}{7}$$

On définit une autre suite $V_n = U_n - \frac{3}{7}$

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - \frac{3}{7} \\ &= 0,3 U_n + 0,3 - \frac{3}{7} \\ &= 0,3\left(V_n + \frac{3}{7}\right) + 0,3 - \frac{3}{7} \\ &= 0,3\, V_n \end{aligned}$$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison 0,3
D'où $V_n = 0,3\, V_{n-1} = (0,3)^2 V_{n-2} = \cdots = (0,3)^{n-1} V_1$

on a : $V_n = (0{,}3)^{n-1} V_1$

alors $U_n - \frac{3}{7} = (0{,}3)^{n-1}\left(U_1 - \frac{3}{7}\right)$

$\Longrightarrow U_n = \frac{3}{7} + (0{,}3)^{n-1}\left(0{,}5 - \frac{3}{7}\right)$

$\Longrightarrow \boxed{U_n = \frac{3}{7} + (0{,}3)^{n-1} \times \frac{2}{7}}$

3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{3}{7}$ car $(0{,}3)^{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Exercice 2 :

1°) $f(x) = x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1 \Rightarrow k < 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-k}^{k} (1+x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-k}^{k} \iff k = \frac{1}{2}$$

2°) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} x(x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

3°) $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{8} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

4°) $$H(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$= \frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y} + \frac{3}{8} - \left[\frac{(-\sqrt{y})^2}{2} - \sqrt{y} + \frac{3}{8}\right] = 2\sqrt{y}$$

si $0 < y \leq \frac{1}{4}$

Ainsi
$$H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 2\sqrt{y} & \text{si } 0 < y \leq 1/4 \\ 1 & \text{si } y > \frac{1}{4} \end{cases}$$

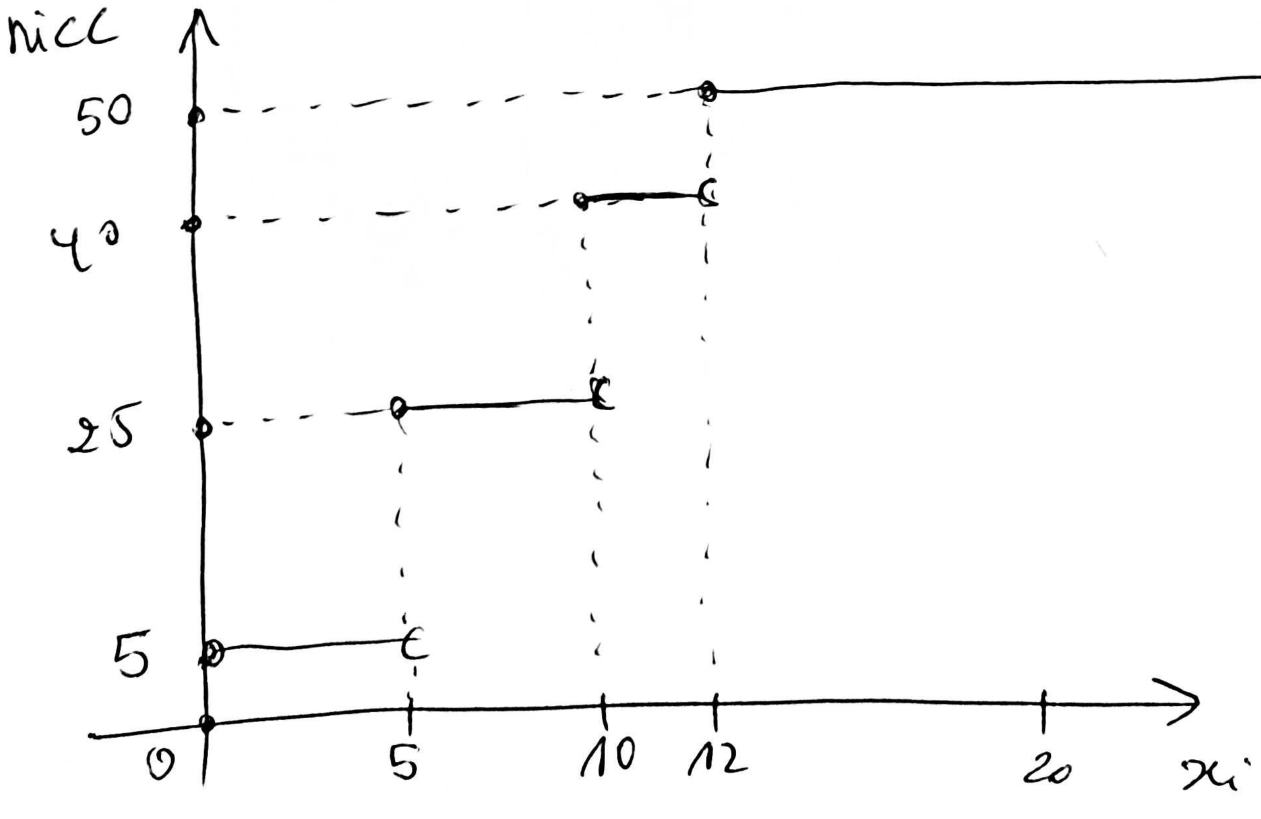
d'où $$h(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin]0, \frac{1}{4}[\\ \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0, \frac{1}{4}[\end{cases}$$

Alors $$E(Y) = \int_0^{1/4} y\,h(y)\,dy = \int_0^{1/4} \sqrt{y}\,dy = \frac{1}{12}$$

Ex.3

$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	n_{icc}	f_i	$F_i = f_{icc}$	c_i	$n_i c_i$	a_i	h_i
[0,5[	5	5	0,1	0,1	2,5	12,5	5	1
[5,10[	20	25	0,4	0,5	7,5	150	5	4
[10,12[	15	40	0,3	0,8	11	165	2	7,5
[12,20[	10	50	0,2	1	16	160	8	1,25
	N=50					487,5		

1°) Courbe cumulative



2) Moyenne arithmétique :

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{4} n_i c_i = \frac{487,5}{50} = 9,75$$

Le Mode Mo :

Comme les amplitudes de classes sont différentes, on définit la classe modale comme étant celle du plus grande hauteur dans l'histogramme (qui correspond à h_i la plus grande). La classe modale est $[10,12[$, et on applique une des formules suivants :

$$(I) \quad M_o = e_{i-1} + \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} a_i$$

ou

$$(II) \quad M_o = e_{i-1} + \frac{h_i - h_{i-1}}{(h_i - h_{i+1}) + (h_i - h_{i-1})} a_i$$

Par application de (I) :

$$M_o = 10 + \frac{1,25}{4 + 1,25} \times 2 = 10,48$$

Par utilisation de (II) :

$$M_o = 10 + \frac{7,5 - 4}{(7,5 - 1,25) + (7,5 - 4)} \times 2 = 10,72$$

La médiane Mé :

$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$, cette valeur existe exactement parmi les $n_i cc \Rightarrow$ la classe médiale est $[5, 10[= [e_{i-1}, e_i[$, Alors on prend

$Mé = e_i = 10$.

3°) $Var(X) = \frac{1}{N} \sum_i n_i (c_i - \overline{X})^2$; on a : $\overline{X} = 9,75$

$[e_{i-1}, e_i[$	n_i	c_i	$c_i - \overline{X}$	$(c_i - \overline{X})^2$	$n_i (c_i - \overline{X})^2$
[0,5[	5	2,5	-7,25	52,5625	262,8125
[5,10[	20	7,5	-2,25	5,0625	101,25
[10,12[	15	11	1,25	1,5625	23,4375
[12,20[	10	16	6,25	39,0625	390,625
	N=50				778,125

$Var(X) = \frac{778,125}{50} = 15,5625$

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{15,5625} = 3,945$