Corrigés du Contrôle de Probabilités
Master M.A.P & M.A.F. 2020 - 2021

Exercice 1 :

1°) Il suffit d'appliquer le théorème de Bernoulli (loi faible des grands nombres) aux v.a. $Z_i = \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$ qui sont indépendantes du fait que les X_i le sont et de même loi de Bernoulli de paramètre $E(Z_i) = P(X_i \leq x) = F(x)$.

Alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} = Y_n \xrightarrow{P} E(Z_i) = F(x)$.

2°) D'après E. Borel (Remarque 4 du cours) dans le théorème de Bernoulli, on peut remplacer la convergence en probabilité par la convergence p.s., on obtient :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{p.s.} E(Z_i) = F(x)$$

C'est aussi la loi forte des grands nombres.

3°) On applique le théorème de De Moivre-Laplace : $(Z_i)_i$ suite de v.a. indép. de même loi de Bernoulli de paramètre $E(Z_i) = P(X_i \leq x) = F(x)$, alors $\sum_{i=1}^{n} Z_i$ suit la loi binomiale de paramètres $(n, F(x))$, d'espérance mathématique $E(\sum_{i=1}^{n} Z_i) = n F(x)$ et de variance $Var(\sum_{i=1}^{n} Z_i) = n F(x)(1-F(x))$ et par le th. central limite (th. de De Moivre-Laplace) on a :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i - nF(x)}{\sqrt{nF(x)(1-F(x))}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\parallel$$

$$\frac{\sqrt{n}(Y_n - F(x))}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 2:

1°) ($\Longrightarrow$) Soit $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, donc $\exists N \in \mathcal{A}$, $P(N)=0$
$\forall \omega \in N^c$; $|X_n(\omega) - X(\omega)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On a pour tout $\omega \in N^c$

$$|X_m(\omega) - X_n(\omega)| \leq |X_m(\omega) - X(\omega)| + |X(\omega) - X_n(\omega)| \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0$$

($\Longleftarrow$) Soit $(X_n)_n$ de Cauchy p.s., alors $\exists N \in \mathcal{A}$, $P(N)=0$ tel $\forall \omega \in N^c$, $(X_n(\omega))_n$ est de cauchy dans $\mathbb{R}^d$ et par suite $\exists X(\omega) \in \mathbb{R}^d$: $X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)$

pour tout $\omega \in N^c$, posons $X(\omega) = \begin{cases} \lim_n X_n(\omega) & \text{si } \omega \in N^c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

X est mesurable et $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

2°) Soit $X_n \xrightarrow{P} X$

Soit $k \geq 1$. Supposons qu'on a construit les $k-1$ premiers termes $n_1 < \dots < n_{k-1}$ de la suite.

Comme $P(|X_n - X| > \frac{1}{k}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut trouver $n = n_k > n_{k-1}$ tel que $P(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{2^k}$.

On remarque que $\lim_{K\to+\infty} \sum_{k=1}^{K} P(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}) = \sum_{k\geq 1} P(|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k})$

Or, par le théorème de convergence monotone,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 1} P(|X_{n_k} - X| > \tfrac{1}{k}) &= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} P(|X_{n_k} - X| > \tfrac{1}{k}) \\
&= \lim_{K\to\infty} E\left(\sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}}\right) \\
&= E\left(\lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}}\right) \\
&= E\left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{|X_{n_k} - X| > \frac{1}{k}\}}\right)
\end{aligned}$$

Comme cette espérance est finie, on en déduit que la v.a. $\sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{|X_{n_k}-X|>\frac{1}{k}\}}$ est finie presque sûrement.

Autrement dit, il y a seulement un nombre fini (dépendant de ω) d'indices k tels que $|X_{n_k}-X|>\frac{1}{k}$.

On en déduit qu'avec probabilité 1, pour tout k assez grand

$$|X_{n_k}-X|\leq\frac{1}{k}.$$

En particulier, $|X_{n_k}-X|\xrightarrow[k\to\infty]{}0$ presque sûrement.

3°) ($\Rightarrow$) Soit $X_n\xrightarrow{P}X$, alors comme $\{|X_n-X_m|>\varepsilon\}\subset\{|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}\}\cup\{|X_m-X|>\frac{\varepsilon}{2}\}$

$$P(|X_n-X_m|>\varepsilon)\leq P(|X_n-X|>\tfrac{\varepsilon}{2})+P(|X_m-X|>\tfrac{\varepsilon}{2})$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Donc $(X_n)_n$ est de Cauchy en probabilité.

($\Leftarrow$) Supposons que $(X_n)_n$ est de Cauchy en probabilité alors par une démonstration analogue à la dém. du 2°) on peut construire une suite d'indices n_k telle que

$$P\left(|X_{n_k}-X_{n_{k+1}}|\geq\frac{1}{2^k}\right)\leq\frac{1}{2^k}$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, il existe pour presque tout ω, un entier $k(\omega)<\infty$ tel que si $k\geq k(\omega)$; $|X_{n_k}(\omega)-X_{n_{k+1}}(\omega)|\leq\frac{1}{2^k}$

Alors, la suite $X_n(\omega)$ est de Cauchy

Donc X_{n_k} converge p.s. vers une limite X,

En particulier, cette sous-suite converge en proba. vers X

Alors $P(|X_n-X|>\varepsilon)\leq P(|X_n-X_{n_k}|>\frac{\varepsilon}{2})+P(|X_{n_k}-X|>\frac{\varepsilon}{2})$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Donc $X_n\xrightarrow{P}X$

4°) ($\Longrightarrow$) Posons $|X|_r = (E|X|^r)^{1/r}$

Alors $|\cdot|_r$ est une norme dans l'espace des v.a. X telles que $E|X|^r < +\infty$

On a : $|X_m - X_n|_r \leq |X_m - X|_r + |X_n - X|_r$

Donc comme $X_n \xrightarrow{m.r.} X$, alors $(X_n)_n$ est de Cauchy en m.r.

($\Longleftarrow$) Soit $(X_n)_n$ de Cauchy en moyenne d'ordre r.

donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$: $\forall m \geq n \geq N(\varepsilon)$, $|X_m - X_n|_r < \varepsilon$

De plus $(X_n)_n$ est de Cauchy en probabilité d'après l'inégalité de Markov. Donc (X_n) converge en proba. vers une v.a. X

Alors $\exists (X_{n_k})$ qui converge vers X p.s.

Soit $m \geq N(\varepsilon)$ fixé, on a $X_m - X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{p.s.} X_m - X$

$\forall k$ tel que $n_k \geq N(\varepsilon)$, on a $|X_m - X_{n_k}| < \varepsilon$

donc $|X_m - X|_r \leq \varepsilon$ (Fatou)

d'où $E|X_m - X|^r < +\infty$, comme $E|X_m|^r < +\infty$

alors $E|X| < \infty$ et $|X_m - X|_r \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$