# Chapitre 6:
# Fonctions Génératrices
# et Fonctions Caractéristiques (suite)

Prof. Mohamed El Merouani

2019/2020

# Introduction :

- La fonction caractéristique d'une v.a. $X$ définie pour tout nombre réel $t$ par $\varphi(t) = E(e^{itX})$ a l'énorme avantage d'exister pour tout nombre réel $t$ et toute v.a. $X$.
- En outre, la correspondance entre loi de probabilité d'une v.a. et fonction caractéristique est bijective.
- Le seule inconvénient est que l'utilisation des fonctions caractéristiques est plus délicat, puisqu'il fait appel à la théorie des fonctions d'une variable complexe.

# Théorème d'unicité :

**Théorème :**

La fonction caractéristique d'une v.a. détermine la loi de cette variable. En d'autres termes, si deux v.a. admettent même fonction caractéristique, elles ont même loi.

Ce théorème justifie l'appellation de fonction caractéristique : La fonction caractéristique caractérise la loi.

# Tableau des fonctions caractéristiques des lois usuelles :

Lois discrètes :

| | |
|---|---|
| Loi de Dirac<br>$X \sim \delta_a$ | $\varphi(t) = e^{ita}$ |
| Loi de Bernoulli<br>$X \sim \mathcal{B}(p)$ | $\varphi(t) = pe^{it} + (1-p)$ |
| Loi binomiale<br>$X \sim \mathcal{B}(n,p)$ | $\varphi(t) = \left(pe^{it} + (1-p)\right)^n$ |
| Loi de Poisson<br>$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ | $\varphi(t) = \exp\left(\lambda(e^{it}-1)\right)$ |

# Tableau des fonctions caractéristiques des lois usuelles :

Lois discrètes :

| | |
|---|---|
| Loi géométrique (1)<br>$X \sim \mathcal{G}(p)$<br>$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ | $\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$ |
| Loi géométrique (2)<br>$X \sim \mathcal{G}(p)$<br>$X(\Omega) = \mathbb{N}$ | $\varphi(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$ |
| Loi binomiale négative (1)<br>$X \sim \mathcal{NB}(n,p)$<br>$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ | $\varphi(t) = \left(\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}\right)^n$ |
| Loi binomiale négative (2)<br>$X \sim \mathcal{NB}(n,p)$<br>$X(\Omega) = \mathbb{N}$ | $\varphi(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{it}}\right)^n$ |

# Tableau des fonctions caractéristiques des lois usuelles :

Lois continues :

| | |
|---|---|
| Loi uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ | $\varphi(t) = \frac{1}{b-a}\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it}$ |
| Loi uniforme $X \sim \mathcal{U}(]a,a+b[)$ | $\varphi(t) = \frac{1}{ibt}\left(e^{i(a+b)t} - e^{iat}\right)$ |
| Loi exponentielle $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ | $\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ |
| Loi normale $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ | $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ |
| Loi normale $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$ | $\varphi(t) = \exp\left(imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$ |

# Tableau des fonctions caractéristiques des lois usuelles :

Lois continues :

| | |
|---|---|
| Loi gamma $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ | $\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$ |
| Loi bêta $X \sim \mathcal{B}(\alpha, \beta)$ | $\varphi(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}$ |
| Loi de Laplace $X \sim \mathcal{L}(\alpha, \lambda)$ | $\varphi(t) = \frac{\lambda^2 e^{it\alpha}}{t^2+\lambda^2}$ |
| Loi de Cauchy $X \sim \mathcal{C}(\alpha, \lambda)$ | $\varphi(t) = \exp(i\alpha t - \lambda\|t\|)$ |
| Loi du Khi-deux $X \sim \chi^2(n)$ | $\varphi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$ |

Soit $F$ la fonction de répartition d'une v.a. et soit $\varphi$ sa fonction caractéristique.
Nous nous proposons d'exprimer $F$ à partir de $\varphi$.

**Théorème général :**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Alors :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(b+0) + F(b-0)\right] - \frac{1}{2}\left[F(a+0) + F(a-0)\right]$$

## Corollaire 1 :

Si $a$ et $b$ sont deux points de continuité de $F$. On a :

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

**Formule d'inversion (Paul-Levy)**

## Corollaire 2 :

Si $\varphi$ est **absolument intégrable**, la fonction de répartition $F$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ et de plus

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

**(Formule de réciprocité de Fourier)**

**<u>Preuve :</u>**

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+h)}}{ith}\varphi(t)dt$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

$$\text{Or,} \quad \left| \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) \right| \leq |\varphi(t)|$$

et puisque, par hypothèse $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty$, on peut en vertu de théorème de Lebesgue, passer à la limite sous l'opérateur d'intégration et on a :

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} \varphi(t) dt$$

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} \frac{1-e^{-ith}}{ith} e^{-itx}\varphi(t)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

Cette dernière intégrale est absolument convergente en $x$ : C'est une fonction continue en $x$.
Donc, la v.a. correspondante à $F(x)$ est absolument continue, de densité $f$. $\blacksquare$

### Exemple

Trouvons la densité de la v.a. dont la fonction caractéristique est $\varphi(t) = e^{-c|t|}$.

En effet, puisque $\varphi(t)$ est absolument intégrable, la distribution est absolument continue avec la densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-c|t|}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(c-ix)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} e^{-t(c+ix)}dt$$

Les fonctions à intégrer sont holomorphes, donc

$$f(x) = \frac{1}{2\pi(c-ix)}\left[e^{t(c-ix)}\right]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2\pi(c+ix)}\left[e^{-t(c+ix)}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{c-ix} + \frac{1}{c+ix}\right] = \frac{c}{\pi(c^2+x^2)}$$

### Théorème :

Si deux fonctions de répartitions correspondent à la même fonction caractéristique, alors elles sont égales.
i.e. $$\varphi_{F_1} = \varphi_{F_2} \Longrightarrow F_1 = F_2$$

La fonction caractéristique d'une v.a. détermine la loi de cette variable. Autrement dit, si deux v.a. admettent même fonction caractéristique, alors elles ont même loi.

### Proposition :

Soit $\varphi_X(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. $X$ et $\varphi_Y(u)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. $Y$.
$X$ et $Y$ ont même loi si, et seulement si $\varphi_X(u) = \varphi_Y(u)$.

# Fonction caractéristique et indépendance :

**Théorème :**

Soit $(X, Y)$ un couple de v.a. indépendantes. Alors, pour tout réel $t$, on a :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

**Preuve :**

En effet, $\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX}e^{itY})$, d'où, puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, donc aussi $e^{itX}$ et $e^{itY}$ :

$$\varphi_{X+Y}(t) = E(e^{itX})E(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

On peut généraliser le théorème précédent de la façon suivante :

**Théorème :**

Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes. Alors, pour tout réel $t$, on a :

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \Pi_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$$

# Fonction caractéristique et indépendance :

## Remarque :

On peut trouver des v.a. $X$ et $Y$ non indépendantes qui vérifient, quand même, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

## Contre-exemple :

Soit $X$ une v.a. de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$ ; sa fonction caractéristique est donnée par $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$. Le couple $(X, Y)$, où $Y = X$ vérifie : $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = (e^{-|t|})^2 = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

## Corollaire :

Le produit de deux fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique.