Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2013/2014
LEF Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Sixième (S6)
Parcours : Gestion

Rattrapage d'Analyse des données

Durée : 1 heure

Problème :

Soit la matrice P des probabilités suivante, associée à une certaine matrice des données de type (3,2) :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

1) Compléter la matrice P en calculant ses probabilités marginales.
2) Dans l'espace IR^2, on représente un nuage $B(I)$ des points M_i avec $i \in I$ de coordonnées suivant des axes normalisés.
   a. Donner tous les points M_i du nuage $B(I)$ en explicitant leurs coordonnées.
   b. Calculer la distance χ^2 entre les différentes paires des points de nuage $B(I)$.
3) a. Déterminer la matrice R et sa transposée R'. En déduire la matrice des variances-covariances $W=R'R$ du nuage $B(I)$.
   b. Calculer la variabilité totale du nuage $B(I)$.
   c. Déterminer les valeurs propres de la matrice W et retrouver la variabilité totale du nuage $B(I)$.
4) On projette, maintenant, le nuage $B(I)$ orthogonalement sur un axe, et on note $C(I)$ le nuage projeté. Donner la variabilité totale de nuage projeté $C(I)$.
5) Calculer la variabilité expliquée par la projection du nuage $B(I)$.

Bon courage !

Rattrapage d'Analyse des données

Pb. : type (3,2)

1°)

	p_{i1}	p_{i2}	$p_{i\cdot}$
p_{1j}	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
p_{2j}	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
p_{3j}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

2°) a) Les points M_i du nuage $B(I)$: $i = 1, 2, 3$ (trois points)

$$M_1 = (\beta_{11}, \beta_{12})$$

$$M_2 = (\beta_{21}, \beta_{22})$$

$$M_3 = (\beta_{31}, \beta_{32})$$

avec $$\beta_{ij} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}\sqrt{p_{\cdot j}}}$$

$$\beta_{11} = \frac{p_{11}}{p_{1\cdot}\sqrt{p_{\cdot 1}}} = \frac{1/12}{1/3\sqrt{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta_{12} = \frac{p_{12}}{p_{1\cdot}\sqrt{p_{\cdot 2}}} = \frac{1/4}{1/3\sqrt{1/2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta_{21} = \frac{P_{21}}{P_{2\cdot}\sqrt{P_{\cdot 1}}} = \frac{1/4}{\frac{1}{3}\sqrt{1/2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta_{22} = \frac{P_{22}}{P_{2\cdot}\sqrt{P_{\cdot 2}}} = \frac{1/12}{\frac{1}{3}\sqrt{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta_{31} = \frac{P_{31}}{P_{3\cdot}\sqrt{P_{\cdot 1}}} = \frac{1/6}{\frac{1}{3}\sqrt{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\beta_{32} = \frac{P_{32}}{P_{3\cdot}\sqrt{P_{\cdot 2}}} = \frac{1/6}{\frac{1}{3}\sqrt{1/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc

$$M_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} ; \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$M_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} ; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$M_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

b) Distance χ^2 entre les points M_i et $M_{i'}$ est :

$$d^2(M_i, M_{i'}) = \sum_{j=1}^{2} (\beta_{ij} - \beta_{i'j})^2$$

$$d^2(M_1, M_2) = (\beta_{11} - \beta_{21})^2 + (\beta_{12} - \beta_{22})^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

$$= 1$$

$$d^2(M_1, M_3) = (\beta_{11} - \beta_{31})^2 + (\beta_{12} - \beta_{32})^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$d^2(M_2, M_3) = (\beta_{21} - \beta_{31})^2 + (\beta_{22} - \beta_{32})^2$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

3°)

a) $$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{pmatrix}$$

avec $$r_{ij} = \frac{P_{ij} - P_{i.} P_{.j}}{\sqrt{P_{i.} \; P_{.j}}}$$

$$r_{11} = \frac{1/12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{-\sqrt{6}}{12}$$

$$r_{12} = \frac{P_{12} - P_{1.} P_{.2}}{\sqrt{P_{1.} P_{.2}}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$r_{21} = \frac{p_{21} - p_{2.}\, p_{.1}}{\sqrt{p_{2.}\, p_{.1}}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

$$r_{22} = \frac{p_{22} - p_{2.}\, p_{.2}}{\sqrt{p_{2.}\, p_{.2}}} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \frac{-\sqrt{6}}{12}$$

$$r_{31} = \frac{p_{31} - p_{3.}\, p_{.1}}{\sqrt{p_{3.}\, p_{.1}}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = 0$$

$$r_{32} = \frac{p_{32} - p_{3.}\, p_{.2}}{\sqrt{p_{3.}\, p_{.2}}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = 0$$

Donc

$$R = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} \\ \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{6}}{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$R' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{12} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{12} & -\frac{\sqrt{6}}{12} & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin

$$W = R'R = \begin{pmatrix} \frac{6}{144} + \frac{6}{144} & -\frac{6}{144} - \frac{6}{144} \\ -\frac{6}{144} - \frac{6}{144} & \frac{6}{144} + \frac{6}{144} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

b) Variabilité totale du nuage $\mathcal{B}(I)$:

$$V_B = tr(W) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

c)

$$\det(W - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{12} - \lambda & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= \left(\frac{1}{12} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{12} - \lambda - \frac{1}{12}\right]\left[\frac{1}{12} - \lambda + \frac{1}{12}\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda\left(\frac{1}{6} - \lambda\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_1 = \frac{1}{6}$$

Donc la variabilité totale est $V_B = tr(W) = 0 + \frac{1}{6} = \sum_i \lambda_i$

4°) Variabilité totale du nuage projeté $\mathcal{C}(I)$:

$$V_C = \lambda_{max} = \frac{1}{6}$$

5°) Variabilité expliquée par la projection de $\mathcal{B}(I)$:

$$\delta = \frac{V_C}{V_B} = \frac{\lambda_{max}}{tr(W)} = \frac{1/6}{1/6} = 1$$

Si on la calcul directement

$$W = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$v_{11} = P_{1.}\left(\beta_{11} - \sqrt{P_{.1}}\right)^2 + P_{2.}\left(\beta_{21} - \sqrt{P_{.1}}\right)^2 + P_{3.}\left(\beta_{31} - \sqrt{P_{.1}}\right)^2$$

$$v_{22} = P_{1.}\left(\beta_{12} - \sqrt{P_{.2}}\right)^2 + P_{2.}\left(\beta_{22} - \sqrt{P_{.2}}\right)^2 + P_{3.}\left(\beta_{32} - \sqrt{P_{.2}}\right)^2$$

$$v_{12} = \frac{P_{11}\,P_{12}}{P_{1.}\sqrt{P_{.1}P_{.2}}} - \sqrt{P_{.1}P_{.2}} + \frac{P_{21}\,P_{22}}{P_{2.}\sqrt{P_{.1}P_{.2}}} - \cancel{\sqrt{P_{.1}P_{.2}}} + \frac{P_{31}\,P_{32}}{P_{3.}\sqrt{P_{.1}P_{.2}}} - \sqrt{P_{.1}P_{.2}}$$

$$v_{21} = \frac{P_{12}\,P_{11}}{P_{1.}\sqrt{P_{.2}P_{.1}}} - \sqrt{P_{.2}P_{.1}} + \frac{P_{22}\,P_{21}}{P_{2.}\sqrt{P_{.2}P_{.1}}} - \sqrt{P_{.2}P_{.1}} + \frac{P_{32}\,P_{31}}{P_{3.}\sqrt{P_{.2}P_{.1}}} - \sqrt{P_{.2}P_{.1}}$$

$$v_{11} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{16}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{16}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{16} = \frac{1}{3.4} = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$v_{22} = \frac{1}{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 0 = \boxed{\frac{1}{12}}$$

$$v_{12} = \frac{\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} - \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} - \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}} - \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{2}{16} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{12} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1-4}{8} + \frac{1-4}{8} + \frac{1-3}{6} = \frac{-3}{8} - \frac{3}{8} - \frac{2}{6}$$

$$= -\frac{6}{8} - \frac{2}{6} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-9-4}{12} = -\frac{1}{12}$$