Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2020/2021
S.M.A.
Semestre 6

Rattrapage de Probabilités 2

Durée: 1h

Exercice 1 : (10 points)
Soient a et b deux nombres entiers tels que $0 < a < b$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi de probabilité est définie par :

$$P(X = i, Y = j) = e^{-b\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}C_j^i a^i (b-a)^{j-i}; \quad i, j \in \mathbb{N}; \quad i \leqslant j$$

1. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire Y. Donner, alors et sans calculs, l'espérance mathématique $E(Y)$ et la variance $Var(Y)$ de la variable aléatoire Y.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $\{Y = j\}$.
3. Déterminer la loi marginale de la variable aléatoire X. Donner, alors et sans calculs, l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $Var(X)$ de la variable aléatoire X.
4. Calculer la covariance $Cov(X, Y)$.

Exercice 2 : (10 points)
Soit une variable aléatoire continue X qui suit une loi gamma de paramètres α et β $(\alpha, \beta > 0)$, notée $\Gamma(\alpha, \beta)$ et de densité de probabilité donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$, est la fonction Eulérienne de second espèce.

1. Montrer que pour tout réel strictement positif α, on a : $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
2. Déterminer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire X. En déduire son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $Var(X)$.
3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement des lois gamma $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$ $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \beta > 0$, avec le même $\beta)$.
   Montrer, alors, que la variable aléatoire $Z = X_1 + X_2$ suit une loi gamma $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.