Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2020/2021
S.M.A.
Semestre 6

Contrôle de Probabilités 2

Durée: 1h

Exercice 1 : (10 points)
On considère une urne contenant $N = a + b$ boules dont a sont blanches et $b = N - a$ sont rouges. On tire de cette urne n boules. On peut tirer les n boules en même temps ou l'une après l'autre sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées parmi les n boules. Cette variable aléatoire suit une loi hypergéométrique notée $\mathcal{H}(n, a, b)$.

1. Donner l'expression de la loi de X et s'assurer que c'est bien une loi de Probabilité.
2. Calculer son espérance mathématique et sa variance en fonction des paramètres n, a et b.
3. On suppose que les proportions $\frac{a}{N}$ et $\frac{b}{N}$ restent fixes. Montrer que, lorsque $N = a+b \to \infty$, la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, a, b)$ peut être approximée par une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{a}{N})$ de paramètres n et $p = \frac{a}{N}$.
4. On considère, maintenant Y et Z deux v.a. indépendantes telles que $Y \sim \mathcal{B}(a, p)$ et $Z \sim \mathcal{B}(b, p)$. Soient k et n deux entiers tels que $k \leqslant n$. Calculer $P(Y = k/Y + Z = n)$. Conclure.

Exercice 2 : (10 points)
La loi d'une variable aléatoire réelle X est dite symétrique lorsque X et $-X$ ont même loi.

1. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi. Exprimer en fonction de la fonction caractéristque φ_X de X, les fonctions caractéristiques suivante : φ_{-X}, φ_{X+Y} et φ_{X-Y}.
2. Montrer que la loi d'une variable aléatoire réelle X est symétrique si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle symétrique de paramètre λ (c'est-à-dire, de densité $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$) ;
4. Déterminer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si X a pour densité $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$. (Indication : on pourra utiliser la question précèdente).
5. Soit Y une variable aléatoire réelle, et Z une variable aléatoire indépendante de Y et de loi donnée par : $P(Z = 1) = \frac{1}{2} = P(Z = -1)$. Montrer que la loi de $X = ZY$ est symétrique et calculer sa fonction caractéristique (en fonction de φ_Y). Si Y admet une densité f, quelle est la loi de X ?

Bonne Chance !