Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2021/2022
S.M.A.
Semestre 6

Contrôle de Probabilités 2

Durée: 1h30min

Exercice 1 : (8 points)
Soit une variable aléatoire continue X qui suit une loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}; \quad x \in]0,1[$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
3. Calculer son espérance mathématique et sa variance.
4. Soit Z une variable aléatoire continue qui suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$ de densité

$$g(z) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+z^2)}; \quad z \in \mathbb{R}.$$

Montrer que la variable aléatoire

$$\frac{1}{1+Z^2}$$

suit la loi de densité f donnée au départ.

Exercice 2 : (12 points)
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre $p \in]0,1[$:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}; \;\; k \in \mathbb{N}^*$$

1. Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.
2. Calculer son espérance mathématique et sa variance.
3. Déterminer sa fonction de répartition.
4. On considère $X_1, X_2, X_3, ...$ des variables aléatoires sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes de même loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, de paramètre p.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire S_n par :

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

   (a) Calculer la loi de la variable aléatoire S_2.
   (b) Calculer, par récurrence, la loi de la variable aléatoire S_n.
5. Soit X une variable aléatoire discrète et $m, n \in \mathbb{N}$,
Montrer que $P(X > m + n / X > n) = P(X > m)$ si, et seulement si X suit une loi géométrique, c'est-à-dire que la loi géométrique est la seule loi discrète sans mémoire.

Ex. 2 :

$X \sim \mathcal{G}(p) \qquad 0 < p < 1$

$P(X=k) = p(1-p)^{k-1} \qquad k \in \mathbb{N}^*$

1°) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}$

$\displaystyle = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$

2°) * $E(X) = \dfrac{1}{p}$

En effet, $\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k p (1-p)^{k-1}$

$\displaystyle = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}$

Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$,

On a $\displaystyle E(X) = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$

* $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

En effet, $\displaystyle E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p (1-p)^{k-1}$

$\displaystyle = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p (1-p)^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k p (1-p)^{k-1}$

$\displaystyle = p(1-p) \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \frac{1}{p}$

Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ pour $|x| < 1$,

on a : $\displaystyle E(X^2) = p(1-p) \frac{2}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$

et donc $\quad \mathrm{Var}(X) = \dfrac{2(1-p)}{p^2} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1-p}{p^2}$

3°) Soit $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \sum_{k \leq x} P(X = k) \qquad [x] \leq x < [x]+1$$

$$= \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} \quad \text{où } [x] \text{ est la partie entière de } x$$

$$= p \sum_{k=1}^{[x]} (1-p)^{k-1}$$

$$= p \, \frac{1-(1-p)^{[x]}}{1-(1-p)} \quad \text{(somme géométrique)}$$

$$= 1-(1-p)^{[x]}$$

Donc

$$F(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^{[x]} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

4°) (a) $S_2 = X_1 + X_2$

avec X_1 et X_2 indép. qui suivent la même loi géométrique de paramètre p.

$$P(S_2 = k) = \sum_{j=1}^{k} P(X_1 = j)\, P(X_2 = k-j)$$

En particulier, on a $\quad P(S_2 = 1) = 0$

si $k \geq 2$, on a $\quad P(S_2 = k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} p(1-p)^{j-1}\, p(1-p)^{k-j-1}$

$$\Rightarrow \boxed{P(S_2 = k) = C_{k-1}^{1}\, p^2 (1-p)^{k-2}}$$

(b) On peut aussi faire le calcul pour $P(S_3 = k)$ pour obtenir une formule de récurrence.

Supposons que la loi de la v.a. S_n soit donnée par

$$P(S_n = k) = \begin{cases} C_{k-1}^{n-1}\, p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } 1 \leq k < n \end{cases}$$

Puisque $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et que les v.a. S_n et X_{n+1} sont indépendantes, il résulte que

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=1}^{k} P(S_n = j)\, P(X_{n+1} = k - j)$$

ce qui donne, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$P(S_{n+1} = k) = 0 \quad \text{si } 1 \leq k \leq n$$

et, si $k \geq n+1$

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} C_{j-1}^{n-1}\, p^n (1-p)^{j-n}\, p\, (1-p)^{k-j-1}$$

$$= \left(\sum_{j=n}^{k-1} C_{j-1}^{n-1} \right) p^{n+1} (1-p)^{k-(n+1)}$$

Reste à calculer le coefficient de $p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}$; pour cela, formons le polynôme $Q(x)$ défini par :

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{k-1} \left(\sum_{j=n}^{k-1} C_{j-1}^{n-1} \right) x^n$$

Par permutations des sommes puis translation d'indices, on obtient successivement

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{n=1}^{j} C_{j-1}^{n-1} x^n \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{m=0}^{j-1} C_{j-1}^{m} x^{m+1} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} x(1+x)^{j-1}$$

$$= x \frac{1-(1+x)^{k-1}}{1-(1+x)}$$

$$= (1+x)^{k-1} - 1$$

Il en résulte que

$$Q(x) = \sum_{j=1}^{k-1} C_{k-1}^{j} x^j$$

En comparant avec la définition de $Q(x)$, on obtient

$$\sum_{j=n}^{k-1} C_{j-1}^{n-1} = C_{k-1}^{n}$$

ce qui démontre que la loi de S_n est donnée par la relation

$$P(S_n = k) = \begin{cases} C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } 1 \leq k < n \end{cases}$$

Cette loi est appelée loi binomiale négative de paramètres n et p.

5°) Mq $P(X>m+n / X>n) = P(X>m) \iff X \sim$ géométrique

($\Rightarrow$) Supposons que

$$P(X>m+n / X>n) = P(X>m)$$

alors $$\frac{P(X>m+n, X>n)}{P(X>n)} = P(X>m)$$

$$\Rightarrow \frac{P(X>m+n)}{P(X>n)} = P(X>m)$$

$$\Rightarrow P(X>m+n) = P(X>m) \cdot P(X>n)$$

Posons $P(X>1) = q$

alors $P(X>2) = P(X>1) \cdot P(X>1) = P(X>1)^2 = q^2$

de même $P(X>3) = q^3$

et $P(X>n) = q^n$

or $P(X=n) = P(X>n-1) - P(X>n)$

$$= q^{n-1} - q^n = q^{n-1}(1-q)$$

donc $X \sim \mathcal{G}(1-q)$

($\Leftarrow$) Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$; $0<p<1$

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$P(X>n) = P(X \geq n+1)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k)$$

$\ell = k-1$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$= p \sum_{\ell=n}^{+\infty} (1-p)^{\ell} = p\, \frac{(1-p)^n - 0}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

$$P(X>m+n / X>n) = \frac{P(X>m+n, P(X>n))}{P(X>n)}$$

$$= \frac{P(X>m+n)}{P(X>n)} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^{n}}$$

$$= (1-p)^{m} = P(X>m)$$

C.Q.F.D.

<u>Ex. 1</u> : X v.a. qui suit une loi de densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad ; \quad x \in]0,1[$$

1°) Il y a deux méthodes pour montrer que cette fonction est bien une densité de probabilité.

- La première est de remarquer que c'est la densité de la loi Arcsinus qui est une loi bêta avec les paramètres $\alpha = \beta = 1/2$

$$f(x) = \frac{1}{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} \quad ; \quad x \in]0,1[$$

on rappelle que $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

- La méthode directe est aussi facile :

on fait le chgt de variable $u = \sqrt{x}$ alors $u^2 = x$ et $2u\,du = dx$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{2du}{\pi\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{\pi}\Big[\text{arcsinus } u\Big]_0^1$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 1$$

2°) La fonction de répartition F est donnée par

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x}) \quad \text{pour } x \in]0, 1[$$

En effet ; une autre fois, en utilisant le chgt de variable

$u = \sqrt{t}$; $u^2 = t$; $dt = 2u\,du$

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}} = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2du}{\pi\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{\pi}\Big[\operatorname{Arcsin}(t)\Big]_0^{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x}).$$

3°) on obtient $E(X) = \frac{1}{2}$ et $Var(X) = \frac{1}{8}$

En effet ;

- L'espérance est $\frac{1}{2}$ par symétrie,

$$E(X) = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

le chgt de variable $u = \sqrt{x}$; $u^2 = x$

$2u\,du = dx$, donne

$$E(X) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}}$$

on fait le chgt de variable $u = \sin\theta$; $du = \cos\theta\,d\theta$

$u = 0 \Rightarrow \theta = 0$
$u = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta$$

or $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$

d'où $E(X) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$$

par le chgt de variables $u = \sqrt{x}$; $x = u^2 \left(\Rightarrow dx = 2u\,du\right)$

on obtient $E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2u^4}{\pi\sqrt{1-u^2}}\,du$

et puis par le chgt de variable $u = \sin\theta$

$du = \cos\theta\,d\theta$, on obtient

$$E(X^2) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{3}{8}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{1}{32}\sin(4\theta)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3}{8}$$

Donc $Var(X) = \dfrac{3}{8} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8}$

4°) $Z \sim \mathcal{C}(0,1)$

Posons $\cancel{Y} = \dfrac{1}{1+Z^2} = \varphi(\cancel{Z})$

avec $\varphi(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$; $\varphi'(z) = \dfrac{-2z}{(1+z^2)^2}$

On ne peut pas appliquer la formule de chgt de variable

Donc on va chercher $F_{\cancel{Y}}$ et puis en va dériver pour obtenir f_Y

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\frac{1}{1+Z^2} \leq y\right) = P\left(\frac{1}{y} \leq 1 + Z^2\right) = P\left(Z^2 \geq \frac{1}{y} - 1\right)$$

$$= 1 - P\left(-\sqrt{\frac{1}{y}-1} \leq Z \leq \sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)$$

$$= 1 - F_Z\left(\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right) - F_Z\left(-\sqrt{\frac{1}{y}-1}\right)$$

Dérivons par rapport à y, on obtient

$$f_Y(y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-1/2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\left[f_Z\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right) + f_Z\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2y^2}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{1/2}\left[\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1-y}{y}\right)} + \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1-y}{y}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi y^2}\sqrt{\frac{y}{1-y}}\left(\frac{\cancel{2}}{\frac{\cancel{y}+1-\cancel{y}}{y}}\right) = \frac{1}{\pi y}\sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

$$= \frac{1}{\pi y}\sqrt{\frac{y}{1-y}} = \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}$$

D'où Y suit la loi de densité donnée au départ.