Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2019/2020
S.M.A.
Semestre 6

Rattrapage de Probabilités 2

(Durée: 1h)

Faites seulement deux exercices, aux choix, parmi les trois exercices suivants :

Exercice 1 : (10 points)
Soient θ un réel strictement positif et X la variable aléatoire de densité f définie par :

$$\forall x \geqslant 1,\ f(x) = \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}, \quad \text{et } 0 \text{ sinon.}$$

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F associée.
2. Calculer $P(0 < X \leqslant 2)$.
3. Pour quelles valeurs de θ, X admet-elle une espérance mathématique ? Calculer-la quand elle existe.

Exercice 2 : (10 points)
Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f. Déterminer la densité de probabilité $h(y)$ de la variable aléatoire $Y = \sin X$ dans les deux cas suivants :

1. si f est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si} \quad x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

2. si f est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2} & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exercice 3 : (10 points)

1. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer sa fonction génératrice des moments $M_Z(t)$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma > 0$, $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Déterminer sa fonction génératrice des moments $M_X(t)$ et retrouver, à partir de sa fonction génératrice des moments, son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $Var(X)$.
3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent, respectivement les lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$. Montrer, en utilisant la fonction génératrice des moments, que la variable aléatoire somme $Y = X_1 + X_2$ suit la loi normale de moyenne $\mu_1 + \mu_2$ et d'écart-type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Bonne Chance !

Corrigés du rattrapage (probabilités 2)

S-M-A S6 2019 - 2020

Exercice 1 :

$\theta > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1°) • f est une fonction positive (puisque $\theta > 0$) définie pour tout $x \in \mathbb{R}$

• $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\theta} \int_1^{+\infty} x^{-\frac{1+\theta}{\theta}}\, dx$$

$$= \frac{-\theta}{\theta} \left[x^{-1/\theta} \right]_1^{+\infty} = \left[\frac{-1}{x^{1/\theta}} \right]_1^{+\infty} = 1$$

D'où f est bien une densité de probabilité

* Déterminons la fonction de répartition F associée :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{\theta} \int_1^x t^{-\frac{1+\theta}{\theta}}\, dt$$

$$= \frac{-\theta}{\theta} \left[t^{-1/\theta} \right]_1^x = -x^{-1/\theta} + 1$$

pour $x \geq 1$

Donc la fonction de répartition est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-1/\theta} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2°) $P(0 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0)$

$$= 1 - 2^{-1/\theta}$$

3°) L'espérance mathématique s'écrit :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \frac{1}{\theta} \int_{1}^{+\infty} x^{-1/\theta}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta - 1} \left[x^{\frac{\theta - 1}{\theta}} \right]_1^{+\infty}$$ converge dans le cas $\theta - 1 < 0$ c'est-à-dire $\theta < 1$

Dans le cas où $0 < \theta < 1$, on aura :

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{1 - \theta}}$$

Exercice 2 :

1°) Dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $g(x) = \sin x$ est continue, dérivable et sa dérivée garde un signe constant pour tout x

On a $g'(x) = \cos x > 0$ pour tout $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Donc, les conditions d'application de la formule $h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right)\left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$

où h est la densité de probabilité de $Y = \sin X$, sont satisfaites.

La fonction inverse $g^{-1}(y) = \text{Arc}\sin y$ est aussi dérivable de dérivée $\left(g^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$

d'où $h(y) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$ pour $y \in]-1, 1[$

Finalement

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in]-1,1[\\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

2°) Dans ce cas $g'(x) = \cos x$ qui est positive pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et négative pour $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ainsi, les conditions d'application de la formule ou du théorème vu dans le cours ne ~~sont~~ pas satisfaites.

Donc, on cherche d'abord la fonction de répartition de Y et après, on dérive celle-ci pour trouver la densité :

$$P(Y \leq y) = P(\sin X \leq y) \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= P(\{0 \leq X \leq x_1\} \cup \{x_2 \leq X \leq \pi\})$$

où $x_1 = \sin^{-1} y$ et $x_2 = \pi - \sin^{-1} y$

Ainsi : $P(Y \leq y) = \int_0^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi^2}\left[\int_0^{x_1} x\,dx + \int_{x_2}^{\pi} x\,dx\right]$

$$= \left(\frac{x_1}{\pi}\right)^2 + 1 - \left(\frac{x_2}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{\pi}\right)^2 + 1 - \left(\frac{x_2}{\pi}\right)^2$$

Donc, la densité de Y est donnée par :

$$h(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin^{-1} y}{\pi}\right)^2 + \frac{d}{dy}\left[1 - \left(\frac{\pi - \sin^{-1} y}{\pi}\right)^2\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exercice 3 :

1°) Soit $Z \sim N(0,1)$

$$M_Z(t) = E\left(e^{tZ}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2)+\frac{t^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t^2)} e^{\frac{t^2}{2}} dx$$

Posons $x-t=u$, alors $dx=du$, d'où

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \cdot e^{t^2/2} = e^{t^2/2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right]$$

or $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = 1$, donc $M_Z(t) = e^{t^2/2}$; $\forall t \in \mathbb{R}$

2°) Soit $X \sim N(\mu, \sigma)$ et on a : $Z \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = E\left[e^{t(\sigma Z+\mu)}\right] = e^{t\mu} E\left(e^{(t\sigma)Z}\right)$$

Alors, d'après 1°), on aura :

$$M_X(t) = e^{t\mu} e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad \text{car } M_Z(t) = e^{t^2/2} \quad \underline{\forall t \in \mathbb{R}}$$

d'où $\boxed{M_X(t) = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}}$ $\underline{\forall t \in \mathbb{R}}$

Calcul de $E(X)$ et $Var(X)$

On sait que $E(X) = M'_X(0)$; $Var(X) = M''_X(0) - (M'_X(0))^2$

$$M'_X(t) = (\mu + \sigma^2 t) M_X(t) = (\mu + t\sigma^2)\, e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$M''_X(t) = (\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2) M_X(t) = (\sigma^2 + (\mu + t\sigma^2)^2)\, e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$M'_X(0) = \mu = E(X)$$

$M''_X(0) = \sigma^2 + \mu^2 = E(X^2)$; d'où $Var(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2$

Donc $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$

4°) On a : $M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(X_1+X_2)}) = E[e^{tX_1 + tX_2}]$

$$= E[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2}]$$

Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, on peut écrire :

$$M_Y(t) = E[e^{tX_1}] \cdot E[e^{tX_2}] = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t)$$

$= e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\, e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}$ (d'après 3°))

$$= e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}$$

qui est la fonction génératrice d'une loi $N(\mu_1+\mu_2, \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$

■