Chapitre de rappels: Compléments sur les fonctions caractéristiques

Prof. Mohamed El Merouani

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques
https://elmerouani.jimdofree.com/calcul-des-probabilités

2023/2024

Plan :

- Rappels
- Fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire (X, Y)
- Fonction génératrice des moments d'un vecteur aléatoire $(X_1, \cdots, X_n)$
- Fonction caractéristique d'un couple aléatoire (X, Y)
- Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire $(X_1, \cdots, X_n)$
- Exercices

Rappels :

- Fonction génératrice (des lois)

$$G(t) = E\left[t^X\right]$$

- Fonction génératrice des moments

$$M(t) = E\left[e^{tX}\right]$$

- Fonction caractéristiques

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right]$$

- Si X est une v.a. discrète :

$$\varphi_X(t) = \Sigma_k e^{itx_k} P(X = x_k)$$

- Si X est une v.a. continue :

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$$

Dans ce cas, φ_X n'est autre que la transformée de Fourier de f.

Fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire (X, Y) :

Définition :

Soit (X, Y) un couple de variables alétoires X et Y. On définit la fonction génératrice des moments du couple aléatoire (X, Y) par :

$$M(u, v) = E\left(e^{uX+vY}\right)$$

C'est une fonction des deux variables réelles u, v qui est définie dans un voisinage ouvert de $(0, 0)$.

Fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire (X, Y) :

Théorème 1 :

La fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire détermine la loi de ce couple.

Théorème 2 :

Soit (X, Y) un couple aléatoire admettant une fonction génératrice des moments $M(u, v)$ (donc définie dans un voisinage ouvert de $(0, 0)$). Alors :

1. Pour tout entiers $k, l \geq 1$, on a $E\left(|X|^k |Y|^l\right) < +\infty$
2. $E(X^k Y^l) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial^k u \partial^l v} M(u, v)|_{(u,v)=(0,0)}$

Fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire (X, Y) :

Théorème 3 :

Soit (X, Y) un couple aléatoire admettant une fonction génératrice des moments $M(u, v)$. Alors chacune des v.a. marginales X, Y admet une fonction génératrice des moments $M_1(u), M_2(v)$. On a, de plus :

$$M_1(u) = M(u, 0); M_2(v) = M(0, v)$$

Fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire (X, Y) :

Théorème 4 :

Soit (X, Y) un couple aléatoire admettant une fonction génératrice des moments $M(u, v)$ défine dans un voisinage ouvert V de $(0, 0)$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X et Y sont indépendantes ;
2. Pour tout $(u, v) \in V$, on a : $M(u, v) = M(u, 0)M(0, v)$.

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) Supposons X, Y indépendantes ;
alors e, e sont indépendantes et l'on a, pour tout $(u, v) \in V$, les relations :

$$M(u, v) = E(e^{uX+vY}) = E(e^{uX})E(e^{vY}) = M(u, 0)M(0, v)$$

Fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire (X, Y) :

Preuve : (Suite)
2) $\Rightarrow$ 1) Supposons que 2) soit vérifié.
Désignons par $F(x, y)$ la fonction de répartition conjointe de (X, Y) et par $F_X(x)$ et $F_Y(y)$ ses fonctions de répartition marginales. Il vient :

$$M(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{ux+vy} dF(x, y) \quad (a)$$

$$M(u, 0)M(0, v) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ux} dF_X(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{vy} dF_Y(y)\right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{ux+vy} dF_X(x) dF_Y(y) \quad (b)$$

Fonction génératrice des moments d'un couple aléatoire (X, Y) :

Comme $(a) = (b)$ pour tout $(u, v) \in V$ (par 2)), il résulte alors du fait que "La fonction génératrice des moments d'une v.a. détermine la loi de cette variable, c'est-à-dire si deux v.a. admettent même fonction génératrice des moments, alors elles ont même loi" (Théorème d'unicité), il résulte que $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ pour tout couple (x, y) ; d'où l'indépendance de X et Y. $\blacksquare$

Fonction génératrice des moments d'un vecteur aléatoire :

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^n$.

Définition :

On appelle fonction génératrice des moments (transformée de Laplace) du vecteur X (si elle existe), la fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie pour $u = (u_1, \cdots, u_n)$ par : $M_X(u) = E\left(e^{<u,X>}\right) = E\left(e^{\sum_{j=1}^{n} u_j X_j}\right)$.

Les propriétés restent les mêmes que dans le cas unidimensionnel. Mais son inconvénient majeur de ne pas toujours exister reste également le même.

Fonction génératrice des moments d'un vecteur aléatoire :

Proposition :

Soit $X = (X_1, \cdots, X_n)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^n$ admettant une fonction génératrice des moements (une transformée de Laplace) sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$.

Les variables $(X_j)_{j=1,\cdots,n}$ sont indépendantes si, et seulement si, pour tout $u = (u_1, \cdots, u_n)$ dans $\mathcal{O}$, on a :

$$M_{X_1,\cdots,X_n}(u_1, \cdots, u_n) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(u_i).$$

Fonction caractéristique d'un couple aléatoire (X, Y) :

Soit (X, Y) un couple de variables alétoires X et Y. On définit la fonction caractéristique du couple aléatoire (X, Y) par :

$$\varphi(u, v) = E(e^{i(uv+vy)}) \ , \ ((u, v) \in \mathbb{R}^2)$$

On peut établir des théorèmes analogues aux théorèmes 1, 2, 3 et 4 précèdents.

Théorème 4' :

Soit (X, Y) un couple de v.a. réelles, dont la fonction caractéristique est notée $\varphi(u, v)$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. X et Y sont indépendantes.
2. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\varphi(u, v) = \varphi(u, 0)\varphi(0, v)$.

Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire :

Définition :

La fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire $X = (X_1, \cdots, X_n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est la fonction définie par :

$$\varphi_X(u) = E\left(e^{i<u,X>}\right) = E\left(e^{i\sum_{j=1}^{n} u_j X_j}\right); \forall u = (u_1, \cdots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

où $<,>$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$ (pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a : $< u, X >= \sum_{j=1}^{n} u_j X_j$ est une v.a.)

Exercices :

Exercice 1 :

On dit qu'une v.a. réelle X, à valeurs dans $[1, +\infty[$, suit la loi de Pareto $\mathcal{P}(a, 1)$, avec $a > 0$, si elle admet une densité donnée par :

$$f(x) = \frac{a}{x^{a+1}} \mathbb{I}_{[1,+\infty[}(x)$$

1. Les moments $E(X^n)$ existent-ils pour toutes les valeurs de $n \geq 1$?
2. Pour quelles valeurs de t la fonction $M(t) = E(e^{tX})$ est-elle définie ? La v.a. X admet-elle une fonction génératrice des moments ? Admet-elle une fonction caractéristique ?

Exercices :

Exercice 2 :

Soit (X, Y) un couple de v.a. indépendantes, suivant chacune une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que le produit XY admet une fonction génératrice des moments donnée par :

$$M(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad (|u| < 1)$$

En déduire sa fonction caractéristique et puis sa densité de probabilité.

Corrigés des exercices :

Exercice 1 :

1) On a : $E(X^n) = \int_1^\infty x^n f(x)dx = a\int_1^\infty \frac{dx}{x^{(a+1)-n}}$
L'intégrale au dernier membre est convergente, si et seulement si $(a+1)-n > 1$,
c'est-à-dire n<a, et dans ce cas elle vaut $\frac{a}{a-n}$.

Corrigés des exercices :

Exercice 1 :

2) $M(t) = E(e^{tX}) = \int_1^{\infty} e^{tx} f(x)dx = a \int_1^{\infty} \frac{e^{tx}}{x^{a+1}} dx.$
Cette intégrale est définie, si et seulement si $t \in]-\infty, 0]$.
Or $]-\infty, 0]$ n'est pas un voisinage ouvert de $t = 0$;
la fonction M n'est donc pas une fonction génératrice des moments.
D'ailleurs, si elle en était une, la v.a. X admettrait des moments de tous les ordres, ce qui, d'après 1), n'est pas le cas.
En revanche, X admet une fonction caractéristique tout comme toute v.a.

Corrigés des exercices :

Exercice 2 :

Calculons la fonction génératrice des moments d'une v.a. X normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$:

On a : $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,

d'où $M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx$

C'est une intégrale gaussienne ; il convient de mettre l'exposant de l'intégrale sous la forme $-\frac{v^2}{2} + c$.

$-\frac{x^2}{2} + tx = -\frac{1}{2}(x^2 - 2tx) = -\frac{1}{2}[(x-t)^2 - t^2]$

$= -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{t^2}{2} = -\frac{v^2}{2} + \frac{t^2}{2}$,

pour $v = x - t$, et finalement

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{\frac{2+t^2}{2}}} dv$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Corrigés des exercices :

Exercice 2 :

On a

$M_{XY}(u) = E(e^{uXY}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{uxy} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{uxy} f_X(x) f_Y(y)dxdy$

$$= \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{uxy} f_Y(y)dy \right) dx$$

Mais $\int_{\mathbb{R}} e^{uxy} f_Y(y)dy = E(e^{uxy}) = M_Y(ux) = e^{\frac{u^2x^2}{2}}$, donc

$$M_{XY}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x^2}{2}} e^{\frac{u^2x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}(1-u^2)} dx$$

Posons $\sigma^2 = \frac{1}{1-u^2}$ avec $|u| < 1$

$$M_{XY}(u) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{avec} |u| < 1$$

Corrigés des exercices :

Exercice 2 :

En remplaçant formellement u par it (t réel), on obtient la fonction caractéristique de XY, soit $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$,
Mais, aussi, on peut calculer la fonction caractéristique de XY où $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, X et Y indépendantes, par un calcul analogue à celui du calcul de la fonction génératrice des moments du produit XY, vu avant.
sa densité est donnée par la formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos tx}{\sqrt{1+t^2}}dt = \frac{1}{\pi}K_0(x),$$

où $K_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de genre 2.