Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques

Année universitaire : 2022/2023
Masters MAF et MAP
Semestre 1

Contrôle de Probabilités

Durée: 1h30

Exercice 1 : (6 points)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, telles que

$$P(X_n = 0) = 1 - \tfrac{1}{n} \text{ et } P(X_n = n) = \tfrac{1}{n}.$$

1. Montrer que X_n tend vers 0, en probabilité.
2. Montrer que X_n ne tend pas vers 0, dans L^1.
3. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que X_n ne tend pas vers 0, presque sûrement.

Exercice 2 : (6 points)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, telles que la loi des X_n est donnée par :

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$$
$$\text{et } P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que $E(S_n) \sim \ln n, Var(S_n) \sim \ln n$, quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $Y_n = \frac{S_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 3 : (8 points)
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer la convergence en probabilité suivante :
$$\frac{1}{\ln n} \max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k \xrightarrow{P} \frac{1}{\lambda}$$
2. Démontrer que la suite de terme général
$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k - \frac{\ln n}{\lambda}$$
converge en loi vers une limite à déterminer.
3. Montrer que $\left(\frac{X_n}{\ln n}\right)_n$ converge vers 0 en probabilité. Est-ce que cette convergence est presque sûre ?

Bonne Chance !