Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2007/2008
LF Sciences Économiques & Gestion
Semestre 3
Module : Méthodes Quantitatives II

Contrôle final de Mathématiques II

Durée : 2 heures

Problème n°1 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer l'inverse de la matrice A.
2. Soit le système d'équations linéaires:

$$\begin{cases} 5x + y - 3z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

a) Donner l'écriture matricielle de système.
b) Résoudre le système par la méthode matricielle.

Problème n°2 :

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2 et vérifier que $P^2 = P + 2I$.
2. En déduire que P est inversible et exprimer la matrice P^{-1} en fonction de P et de I.
3. Monter que les vecteurs lignes de P forment une base de l'espace vectoriel IR^3.

Problème n°3 :

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$..

4. Déterminer le rang de la matrice M.
   La matrice M est-elle inversible ? Pourquoi ?
5. Calculer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
   Montrer que M est diagonalisable et déterminer la matrice de passage est P telle que $P^{-1}MP$ soit une matrice diagonale D..
6. En déduire, M^n, la puissance nième de M.

Problème n° 2 !

C.F. Maths II

2007 – 2008

1°) $$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= P + 2I$$

2°) On peut donc écrire : $\dfrac{P^2 - P}{2} = I$

i.e $\quad P\left(\dfrac{P - I}{2}\right) = I$

ce qui montre que P est inversible et que :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}(P - I)} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

(En effet, P et $\dfrac{P-I}{2}$ commutent, il suffit donc de regarder ce qui se passe à droite !)

3°) Comme P est inversible, alors son déterminant $\det P \neq 0$ i.e $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

Donc les vecteurs $(0,1,1)$; $(1,0,1)$ et $(1,1,0)$ sont libres. En plus sont en nombre de 3

$3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Problème n° 1 :

1°) En ajoutant la ligne 3 à la ligne 1, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 60 \neq 0$$

A est donc inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t\mathrm{com}\, A$$

$$= \frac{1}{60} \, {}^t\mathrm{com} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{Com} A = \begin{pmatrix} 10 & -8 & -6 \\ 0 & 18 & 6 \\ 10 & 4 & 18 \end{pmatrix}$$

$$^t\text{Com} A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ -8 & 18 & 4 \\ -6 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 \\ -8 & 18 & 4 \\ -6 & 6 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -4 & 9 & 2 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

2°) $\begin{cases} 5x + y - 3z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ x - y + 3z = 3 \end{cases}$

a) L'écriture matricielle de ce système :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = K$$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A.X=K$

$$\Rightarrow A^{-1}.A.X=A^{-1}.K$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}.K$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -4 & 9 & 2 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 2/3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problème n°3 :

1°) $$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

On voit facilement que les deux premières colonnes de M sont indépendantes alors que la troisième colonne est l'opposée de la seconde.

M sera de rang 2.

La matrice M n'est donc pas inversible puisque son rang est strictement inférieur à son ordre.

2°) on a :

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -\lambda \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & -3+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-4)$$

c'est-à-dire que Spectre de M est $\{0, 2, 4\}$

B étant carrée d'ordre 3 et ayant 3 valeurs propres distincts, on peut déjà affirmer que B est diagonalisable, ce que nous allons vérifier à l'instant. Cherchons les vecteurs propres associés

- E_0 ? si $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = k(0,1,1) \quad ; k \in \mathbb{R}$$

- E_2 ? si $\lambda = 2$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = k(1, 1, 0) \quad k \in \mathbb{R}.$$

- E_4 ? si $\lambda = 4$

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x, y, z) = k(1, 0, 1) \quad ; k \in \mathbb{R}$$

3°)

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On peut voir que

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(même en utilisant le Pb précédent)

4°) On a $M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad M^n = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}$

Tous calculs faits, on trouve

$$M^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 2^n - 4^n & 4^n - 2^n \\ 2^n & 2^n & -2^n \\ 4^n & -4^n & 4^n \end{pmatrix}$$