Solution de l'exercice 1.4 page 17

a)-montrer que :

$F_1=\{(x,y)\in R/3x=2\}$ est espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- $F_1 \subset$(inclus) $\mathbb{R}^2$ (par définition)
- $F1\neq\emptyset$ car $(0,0)\in F_1$

Soient(x,y) ;$(x',y')\in F_1$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Donc $\alpha(x,y)+\beta(x',y')\in F$

a-t-on $\alpha(x,y)+\beta(x',y')\in F$ conclusion F_1 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$\alpha(x,y)+\beta(x',y')=(\alpha x+\beta x' ;\alpha y+\beta y')$

$3(\alpha x+\beta x')=2(\alpha y+\beta y)$

$3(\alpha x+\beta x')=\alpha X3x+\beta X3x'$

$=\alpha X2y+\beta X2y'$

$=2(\alpha y+\beta y')$

b)-$F_2=\{(x,y,z)\in R/2x-y=y=-2z=0$ set sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

- $F_2\subset R^3$(par définition)
- $F_2\neq\emptyset$ car $(0,0,0)\in F_2$

Soient$(x,y,z)(x',y',z')\in F_2$ et $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

a-t-on $\alpha(x,y,z)(x',y',z')+\beta(x',y',z')\in F_2$.

$\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')=(\alpha x+\beta x',\alpha y+\beta y',\alpha z+\beta z')$.

$2(\alpha x+\beta x',\alpha y)-\alpha y-\beta y'=2(x-y)+\beta(2x'-y')=\alpha(y-2z)+\beta(y'-2z')=\alpha y+\beta y'-2(\alpha z+\beta z')=0(y-2z=0)$

Donc $\alpha(x,y,z)+\beta(x',y',z')\in F$; conclusion(F_2 est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

c)-identique à la question (b)

d) montrons que :

$G=\{(f(x)=ax+b+c/x^2+1 ;a,b,c,\in\mathbb{R}$

Est sous espace vectoriel de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$=l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

- $G\subset F(\mathbb{R},\mathbb{R})$(par définition)
- $G\neq\emptyset$ car $f(x)=0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

Est un élément de G avec a=0 ;b=0 ;c=0

- Soient $f_1(x)= ax+b+c/x^2+1$ et $f_2(x)= a'x+b'+c/x^2+1$ et $\alpha,\beta\subset\mathbb{R}$

$\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)= \alpha(ax+b+c/x^2+1)+\beta(a'x+b'+c/x^2+1)=$ **(**$\alpha a+\beta a)x+ \alpha b+ \beta b'+ (\alpha c+ \beta c')/x^2+1 = ax+ \beta+c/x^2+1$

avec A= $\alpha a' + \beta a' \in \mathbb{R}$

B=$\alpha\ \beta + \beta b' \in \mathbb{R}$

et C= $\alpha c + \beta c' \in \mathbb{R}$

donc $\alpha\ f_1(x) + \beta\ f_2(x)$ (x est une fonction de G :conlusion G est sous espace vectoriel de F($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$)).