EXERCICE N° 1.6 PAGE 17

1) → Deux vecteurs, sont linéairement dépendants c-à-d il existe un scalaire $\lambda \in IR^2$ tel que **U**=**λ**.V

Donc $(\alpha,1,\beta)=\lambda(1,\beta,\alpha)$ on encore $(\alpha,1,\beta)=(\lambda,\lambda\beta,\lambda\alpha)$

$$\begin{cases}\alpha=\lambda\\ \lambda\beta=1\\ \alpha=\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha\beta=1\\ \alpha^2=\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha\beta=1\\ \alpha^3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\end{cases}$$

Alors

$\alpha=\beta=1$

→ **U** et **V** sont indépendants c-à-d $\alpha \neq 1$ et $\beta \neq 1$.

2) **U** et **V** sont orthogonaux si **U.V=0**

On encore $(\alpha,1,\beta) . (1,\beta,\alpha)=0$

$(\alpha\times1) + (1\times\beta) + (\beta\times\alpha)=0$

$\alpha+\beta+\alpha\beta=0$

3) Soit **W** $(x,y,z) \in$ **IR³** orthogonaux à **U** et **V**.

On a

$$\begin{cases}\mathbf{W}\,.\,\mathbf{U}=0\\ \mathbf{W}\,.\,\mathbf{V}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha x+y+\beta z=0\\ x+\beta y+\alpha z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=-\alpha x-\beta z\\ x=-\beta y-\alpha z\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha(-\beta y-\alpha z)+y+\beta z=0\\ x+\beta(-\alpha x-\beta z)+\alpha z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(1-\alpha\beta)y+(\beta-\alpha^2)z=0\\ (1-\alpha\beta)x+(\alpha\beta^2)z=0\end{cases}$$

Premier cas : $\boxed{1-\alpha\beta=0}$

Le système devient $\begin{cases} (\beta-\alpha^2)z=0 \\ (\alpha-\beta^2)z=0 \end{cases}$

Si $z\neq 0$ alors

$$\begin{cases} \beta=\alpha^2 \\ \alpha=\beta^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha\beta=\alpha^3=1 \\ \alpha\beta=\beta^3=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible car d'après la question -1- U et V sont linéairement indépendants
donc $z=0$ et alors $x+\beta y=0$ ce qui implique $x=-\beta y$
Par suite W a la forme $(\beta y, y, 0)=y(-\beta,1,0)$ avec $y \in IR^*$

Deuxième cas : $\boxed{1 - \alpha\beta = 0}$

Alors

$$x= \frac{(\beta^2-\alpha)}{1-\alpha\beta} z \quad \text{et} \quad y= \frac{(\alpha^2-\beta)}{1-\alpha\beta} z$$

Donc $$W= \frac{\beta^2-\alpha}{1-\alpha\beta} z \ , \ \frac{\alpha^2-1}{1-\alpha\beta} z$$

$$= \frac{z}{1-\alpha\beta} (\beta^2-\alpha \ , \ \alpha^2-\beta \ , \ 1-\alpha\beta)$$

$$= \lambda (\beta^2-\alpha , \alpha^2-\beta , 1-\alpha\beta)$$

Avec

$$\lambda = \frac{z}{1-\alpha\beta} \in IR$$

Donc les vecteurs orthogonaux à U et V dans le cas $\alpha\beta\neq 1$ ont la forme
$$W= \lambda (\beta^2-\alpha , \alpha^2-\beta, 1-\alpha\beta)$$

4) Pour que $\{ U,V,W \}$ forment une base orthonormée de IR^3 il faut que

$$||U|| = ||V|| = ||W|| = 1$$

Et

$$\begin{cases} U.V=0 \\ U.W=0 \\ V.W=0 \end{cases}$$

$||U^2|| = \alpha^2+1+\beta^2=1$ $\Longrightarrow$ $\alpha^2+\beta^2=0$ $\Longrightarrow$ $\alpha=\beta=0$

$||V^2|| = 1+\beta^2+\alpha^2=1$

Par suite W = $\lambda(0,0,1)$ avec $\lambda\in$ IR* (on traite le cas ou $\alpha\beta\neq 0$)

$||W^2|| = \lambda^2 = |\lambda| = 1$ ou -1
W(0,0,1) ou W(0,0,-1)
On a $\alpha+\beta+\alpha\beta=0$ (car $\alpha=\beta=0$)

Ceci implique que U et V sont orthogonaux.

Donc {U, V,W} est libre et sont en nombre 3= dim IR³ d'où ils forment une base orthonormée à IR³

EXERCICE N° 1.7 PAGE

1)_ U= (1,3,2) V= (1,-2,0) W= (2,1,3)

Ces vecteurs sont en nombre 3 il suffit de démontrer que {U ,V ,W} est libre pour qu'elle soit une base de IR³ qui est de dimension 3.
Soient $\alpha,\beta \in$ IR tel que $\alpha U+\beta V+\delta W=0$
Ceci implique t-il que **$\alpha=\beta=\delta=0$**
?
$\alpha(1,3,2)+\beta(1,-2,3)+\delta(2,1,3)=(0,0 ;0)$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+2\delta=0 \\ 3\alpha-2\beta+\delta=0 \\ 2\alpha+3\delta=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+[2*(-2/3)]=\alpha-4/3\alpha+\beta=0 \\ 3\alpha-2\beta-2/3\alpha=7/3\alpha-2\beta=0 \\ \delta= -2/3\ \alpha \end{cases}$$

$$\mathbf{2}\ \times \begin{cases} -\alpha/3+\beta=0 \\ 7/3\alpha-2\beta=0 \\ \delta= -2/3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2/3\alpha+2\beta=0 \\ 7/3\alpha-2\beta=0 \\ \delta= -2/3\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5/3\alpha=0 \\ 7/3\alpha-2\beta=0 \\ \delta= -2/3\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \delta=0 \end{cases}$$

Conclusion {**U**,**V**,**W**} est libre par suite elle est

2)_ soient x' et x '' et x''' les composants de x dans la base {**U**,**V**,**W**}

On a donc X= x'U +x''V+x '''W

(0,0,-1)=x'(1,3,2)+x''(1,-2,0)+x'''(2,1,3)

$$\begin{cases} x'+x''+2x'''=0 \\ 3x'-2x''+x'''=0 \\ 2x'+3x'''=-1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{3}\times\begin{cases} 3x'+3x''+6x'''=0 \\ 3x'-2x''+x'''=0 \\ 2x'+3x'''=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x''+5x'''=0 \\ 3x'+2x''+x'''=0 \\ 2x'+3x'''=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''=-x''' \\ 3x'+2x''+x'''=0 \\ 2x'+3x'''=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''=-x''' \\ x'=-x''' \\ -2x'''+3x'''=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x''=-x''' \\ x'=-x''' \\ x'''=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=1 \\ x''=1 \\ x'''=-1 \end{cases}$$

Donc X=**U**+**V**-**W**

3)_ Y est orthogonal à **U** et **V** si $\begin{cases} Y.\mathbf{U}=0 \\ Y.\mathbf{V}=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2+3a+2b=0 \\ 2-a=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-5/3 \end{cases}$$

Donc y(2,1,-5/3) est orthogonal à **V** et **U.**