«Algèbre matricielle»

Solution de l'exercice 2.8 page 46 :

1- $\det A = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4 - 3 = 1 \neq 0$

Alors A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^{t}\mathrm{com}\,(A)$$

$$(\Delta ij) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}(\Delta ij) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 1 * \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2/\ \ A.A = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 31 & 22 \\ 7 & 18 & 13 \\ 6 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$-7A^2 = \begin{pmatrix} -84 & -217 & -154 \\ -49 & -126 & -91 \\ -42 & -105 & -77 \end{pmatrix}$$

$$A^2.A = \begin{pmatrix} 12 & 31 & 22 \\ 7 & 18 & 13 \\ 6 & 15 & 11 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 77 & 197 & 142 \\ 45 & 115 & 83 \\ 38 & 97 & 70 \end{pmatrix}$$

$$4A = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 12 \\ 4 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 7A^2 + 4A - I = \begin{pmatrix} 77 & 197 & 142 \\ 45 & 115 & 83 \\ 38 & 97 & 70 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -84 & -217 & -154 \\ -49 & -126 & -91 \\ -42 & -105 & -77 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 20 & 12 \\ 4 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

On a: A3 – 7A2 + 4A – I = 0
Donc: A3 – 7A2 + 4A = I
A (A2 – 7A + 4I) = I
(A – 7A + 4I).A = I
$A^{-1} = A^2 - 7A + 4I$

$$A\text{-}1 = \begin{pmatrix} 12 & 31 & 22 \\ 7 & 18 & 13 \\ 6 & 15 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -35 & -21 \\ -7 & -21 & -14 \\ -7 & -14 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 2.9 page 46:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tA.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I \neq I$$

Donc A n'est pas orthogonale.

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^tB = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^tB,B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Donc B est une matrice orthogonale.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$
{}^{t}C = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{t}C.C = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix} \neq I
$$

Donc C n'est pas une matrice orthogonale.

$$
D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad {}^{t}D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{t}D.D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 6 \neq I
$$

Donc D n'est pas une matrice orthogonale.

$$
E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$
{}^{t}E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}
$$

$$^{t}E.E = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Alors E est une matrice orthogonale.

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^{t}F = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$^{t}F.F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

F est une matrice orthogonale.