Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire : 2007/2008
Filière : Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Troisième (S3)
Module : Méthodes Quantitatives II
Élément : Mathématiques II

Contrôle de rattrapage
(Durée 1 heure)

I. Déterminer le rang de la matrice $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

II. Calculer l'inverse de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

III. Calculer le produit de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ par $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. Quelles sont les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer les sous espaces propres de A.

2007 / 2008

Correction du rattrapage de Maths II

S_3 d'économie et gestion

I. D'abord, on calcule le déterminant de C

$$\det C = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Si on développe suivant la $1^{ère}$ ligne, on a :

$$\det C = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det C = -2 - 2(-2) + (-2) = 0$$

donc C n'est pas inversible, d'où elle n'est pas de plein rang $\Rightarrow \text{rg}(C) < 3$

On calcule, maintenant, les déterminants d'ordre 2 extraits de la matrice C

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{rg}(C) = 2}$

II. $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

On développe suivant la $3^{ème}$ ligne ;

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2 \neq 0$$

donc, effectivement, B^{-1} existe, et on a :

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\, {}^t\mathrm{com}(B)$$

$$\mathrm{Com}(B) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Com}(B) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t\mathrm{com}(B) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & 2 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$B.B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & 2 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

de même $B^{-1}.B = I$

III. $$MN = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{(2,5)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{(5,2)}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

IV. On voit clairement que la matrice A est une matrice diagonale, donc ses valeurs propres sont 4, -2 et 3. (les éléments de la diagonale).

On note les sous-espaces propres par E_λ

E_4? on a: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est équivalente à

$$\begin{cases} +6y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_4 = \{(x,0,0) / x \in \mathbb{R}\}$

E_{-2}? on aura: $\begin{cases} 6x = 0 \\ 5z = 0 \end{cases}$

alors $E_{-2} = \{(0,y,0) / y \in \mathbb{R}\}$

E_3? de même, on obtient dans ce cas :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 5y = 0 \end{cases}$$ alors

$$E_3 = \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}.$$