Exercice 1.2- page 10 :

Comme F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E,

1) $\left.\begin{array}{l} F \subset E \\ G \subset E \end{array}\right\} \Rightarrow F \cap G \subset E$

et $\begin{array}{l} 0 \in F \\ 0 \in G \end{array}$ donc $0 \in F \cap G \neq 0$.

Soient x, y $\in G$; α, β $\in IR$ a-t-on $\alpha x + \beta y \in F \cap G$?

$x \in F \cap G$ alors $x \in F$ et $x \in G$

Donc $\alpha x \in F$ et $\alpha x \in G$

$y \in F \cap G$ alors $y \in F$ et $y \in G$

Donc $\beta y \in F$ et $\beta y \in G$

D'où $\alpha x + \beta y \in F$ et $\alpha x + \beta y \in G$

Finalement, $\alpha x + \beta y \in F \cap G$

Conclusion : $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

2) On a $F \subset E$ et $G \subset E$

donc si $x \in F$ et $y \in G$ alors $x \in E$ et $y \in E$

d'où $x + y \in E$

par suite $F + G \subset E$

$F \neq \emptyset$ donc $\exists x_0 \in F$ et $G \neq \emptyset$ donc $\exists y_0 \in G$, alors $x_0 + y_0 \in F + G$

D'où $F + G \neq \emptyset$

Soit $a \in F + G$; $b \in F + G$ donc $\exists x_1, x_2 \in F$ et $y_1, y_2 \in G$ tels que :

$a = x_1 + y_1$ et $b = x_2 + y_2$

Soient α, β$\in IR$ alors $\alpha a + \beta b = \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2)$

$$= \underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{\in F} + \underbrace{\alpha y_1 + \beta y_2}_{\in G} \in F + G$$

D'où $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.