Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire 2009/2010
Filière : Sciences Éco. & Gestion
Semestre : Troisième (S3)
Module : Méthodes Quantitatives II

Contrôle final de Mathématiques II
(Durée 2 heures)

Exercice 1 :

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix};\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Déterminer les valeurs réelles du paramètre λ tels que les vecteurs suivants forment un système libre dans IR^3 :

$$u=\left(\lambda,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);\quad v=\left(-\frac{1}{2},\lambda,-\frac{1}{2}\right);\quad w=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\lambda\right).$$

Exercice 3 :

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -12\\ 0 & 3 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

Déterminer les valeurs propres de A et leurs sous-espaces propres associés.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 :

Une matrice A carrée d'ordre n est dite idempotente si et seulement si $A\cdot A=A^2=A$

1) Démontrer que si la matrice A suivante est idempotente,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -4\\ -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$$

2) Démontrer que si une matrice A est idempotente, alors $A^n=A;\ \forall n\in IN^*$.
3) Démontrer que si $AB=A$ et $BA=B$, alors A et B sont idempotente.
4) Démontrer que les valeurs propres d'une matrice idempotente A sont 1 ou 0.
5) Soit A une matrice idempotente. Démontrer que $(2A-I)^2=I$.

Exercice 5 :

Soient A et B deux matrices semblables avec P leur matrice de passage.

1) Montrer que pour tout $n\in IN$, on a : $A^n=P\cdot B^n.P^{-1}$
2) Si deux matrices inversibles A et B sont semblables, est-ce que A^{-1} est semblable à B^{-1} ? Est-ce que ${}^tA$ est semblable à ${}^tB$? (Justifier votre réponse)
3) Avec les notations précédentes, considérons $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

   Calculer les puissances A^3, A^{10} et A^n, $n\in IN$.

Bon courage !

Corrigés du C.F.
Maths VI

Exercice 5

Soient A et B deux matrices semblables avec P leur matrice de passage, donc

$$A = P.\ B.\ P^{-1}$$

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$A^n = \underbrace{(P.B.P^{-1})(P.B.P^{-1}) \ldots (P.B.P^{-1})(P.B.P^{-1})}_{n\text{- fois}}$$

$$= PB\underbrace{P^{-1}P}_{I}B\underbrace{P^{-1}P}_{I} \ldots \underbrace{P^{-1}P}_{I}B\underbrace{P^{-1}P}_{I}B.P^{-1}$$

$$= P\underbrace{B.B \ldots B}_{n\text{- fois}}P^{-1} = P.B^n.P^{-1}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = P.B^n.P^{-1}$.

2°) Soit $A = P.B.P^{-1}$ alors $A^{-1} = (P.B.P^{-1})^{-1}$

$$\Longrightarrow A^{-1} = (P^{-1})^{-1}.(P.B)^{-1} = P\, B^{-1} P^{-1}$$

d'où A^{-1} est aussi semblable à B^{-1}.

Est-ce que ${}^tA$ est semblable à ${}^tB$?

on a : $A = P.B.P^{-1}$ alors ${}^tA = {}^t(PBP^{-1})$

$$\Longrightarrow {}^tA = {}^t(P^{-1})\,{}^t(PB)$$

$$\Longrightarrow {}^tA = ({}^tP)^{-1}\,{}^tB\,{}^tP$$

ce qui veut dire que ${}^tA$ est semblable à ${}^tB$ avec matrice de passage ${}^tP$.

3°) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

on a :

$$A = PBP^{-1} \quad \text{donc} \quad A^3 = PB^3P^{-1}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\mathrm{com}\,P$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$\mathrm{com}\,P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t\mathrm{com}\,P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2^3 & -2 \cdot 3^3 \\ -2 \times 2^3 & 3 \cdot 3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -3 \times 2^3 + 4 \cdot 3^3 & -2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 3^3 \\ +6 \cdot 2^3 - 6 \cdot 3^3 & 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 3^3 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = P B^{10} P^{-1}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 \\ 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^{10} + 4 \cdot 3^{10} & -2 \cdot 2^{10} + 2 \cdot 3^{10} \\ 6 \cdot 2^{10} - 6 \cdot 3^{10} & 4 \cdot 2^{10} - 3 \cdot 3^{10} \end{pmatrix}$$

de même

$$A^n = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n & -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n \\ 6 \cdot 2^n - 6 \cdot 3^n & 4 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

$n \in \mathbb{N}$

Exercice 1 rang des matrices

* $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5-6 \neq 0$

$rg\, A = 2$

* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

On développe suivant la $1^{ère}$ colonne :

$\det B = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 + 2 = 4 \neq 0$

$rg\, B = 3$

* $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de type $(4,3)$

Un déterminant extrait de C est $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4

On développe suivant la $3^{ème}$ ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-2) + (-2) = -1 \neq 0$$

Donc $\operatorname{rg} C = 3$

Exercice 2

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda & -1/2 \\ 0 & -\frac{1}{2}-\lambda & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

On développe, alors, suivant la $3^{ème}$ ligne :

$$= -\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(-1)^5 \begin{vmatrix} \lambda & -1/2 \\ -\frac{1}{2} & -1/2 \end{vmatrix} + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)(-1)^6 \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-\lambda}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\left[-\frac{1}{2}+\lambda-\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)$$

Le système est lié $\iff \left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)=0$

$\iff \lambda=-\frac{1}{2}$ ou $\lambda=\frac{1}{4}$

D'où ces vecteurs forment un système libre ssi

$\lambda \in \mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$

Exercice 3

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -12\\ 0 & 3 & -9\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique :

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & -12\\ 0 & 3-\lambda & -9\\ 0 & 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

On développe suivant la $1^{ère}$ colonne :

$$=(1-\lambda)(-1)^2\begin{vmatrix}3-\lambda & -9\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\left(-(3-\lambda)(3+\lambda)+9\right)$$

$$=(1-\lambda)\left(-(9-\lambda^2)+9\right)=(1-\lambda)\left(-9+\lambda^2+9\right)$$

$$=\lambda^2(1-\lambda)$$

Donc le polynôme caractéristique est $\boxed{\lambda^2(1-\lambda)=0}$

Valeurs propres de A : 2 valeurs propres qui sont :

$\lambda=0$ (valeur propre double)

$\lambda=1$ (" " simple)

Sous_espaces propres associés aux valeurs propres de A :

$\lambda = 0$

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + 4y - 12z = 0 \\ 3y - 9z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 4y - 12z = 0 \\ y = 3z \end{cases} \implies \begin{cases} x + 4y - \frac{12}{3} y = 0 \\ y = 3z \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases}$$

$$E_0 = \{ (0, 3z, z) / z \in \mathbb{R} \}$$

$\lambda = 1$

$$AX = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + 4y - 12z = x \\ 3y - 9z = y \\ y - 3z = z \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 4y - 12z = 0 \\ 2y - 9z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y - 3z = 0 \\ 2y - 9z = 0 \\ y = 4z \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} y - 3z = 4z - \frac{9}{2} z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$E_1 = \{ (x, 0, 0) / x \in \mathbb{R} \}$$

On a : $\dim E_0 = 1$

$\dim E_1 = 1$

$\Rightarrow \dim E_0 + \dim E_1 = 2 < 3$

D'après le $2^{\text{ème}}$ critère, la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 4

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2+3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A$$

2) Soit A une matrice idempotente, donc $A^2 = A$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Essayons de démontrer, par récurrence, que

$A^n = A \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

pour $n = 1$; $A = A$

pour $n = 2$ $\quad A^2 = A$ (idempotence)

$n = 3$ $\quad A^3 = A^2 . A = A . A$

$= A^2 = A$

supposons que $A^n = A$ et montrons

que $A^{n+1} = A$

on a : $A^{n+1} = A^n . A = A . A = A^2$

$= A$ (idempotence)

Conclusion :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A^n = A.$

3) Soit A et B deux matrices carrée d'ordre n

telles que $AB = A$ et $BA = B$.

on a : $AB = A \Longrightarrow ABA = A^2$

$\Rightarrow AB = A^2$

alors on a : $AB = A$ et $AB = A^2$

d'où $A^2 = A$

conclusion : A idempotente.

de même $BA = B$

$\Rightarrow B\underbrace{AB}_{} = B^2$

$\Rightarrow BA = B^2$

on a donc $BA = B$ et $BA = B^2$

alors $B^2 = B$.

d'où B est idempotente aussi

4) Soit X un vecteur propre de A et soit λ sa valeur propre associée

Alors $AX = \lambda X$

comme $A = A.A$ (idempotence) on a :

$$A.A.X = A.\lambda.X = \lambda AX = \lambda^2 X$$

donc on a $AX = \lambda X$

et $AX = \lambda^2 X$

d'où $\lambda = \lambda^2$

Mais ce-ci n'est vrai que pour $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$

5) $(2A-I)^2 = (2A-I)(2A-I)$

$= 4A^2 - 2A - 2A + I^2$

$= 4A^2 - 4A + I^2 = 4A - 4A + I$

car $A^2 = A$ et $I^2 = I$

d'où $(2A-I)^2 = I$