

Exercice 3.3 de la page 63

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ on a le polynôme caractéristique de } A \text{ est :}$$

$$\begin{aligned} \text{Det} (A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) (2-\lambda) - 2 \\ &= 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 \\ &= (\lambda - 1) (\lambda - 4) \end{aligned}$$

Donc l'équation caractéristique est :

$$(\lambda - 1) (\lambda - 4) = 0$$

Le matrice A a deux valeurs propres : 1 et 4.

On peut conclure dès maintenant que la matrice A est diagonalisable d'après le critère $n \cdot 1$: On est dans \mathbb{R}^2 , la matrice A carrée d'ordre 2 et elle a deux valeurs propres distinctes.

Cherchons les sous-espaces propres correspondants.

1ere cas : $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} AX = X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = x \\ x + 2y = y \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -y \end{aligned}$$

$$\text{Donc } E_1 = \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\}$$

2eme cas : $\lambda = 4$

$$AX = 4X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 4x \\ x + 2y = 4y \end{cases} \Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

Donc $E_4 = \{(2y, y) / y \in \mathbb{R}\}$

La matrice A est semblable à la matrice D suivante :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage inversible est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Et on a : $D = P^{-1}AP$