# Rappels de calcul des probabilités

## Définitions de probabilité

- Il existe plusieurs définitions:
  - Définition fréquentielle
  - Définition axiomatique ou ensembliste
  - Définition bayesienne

# Notion d'événement

- Un événement est la réalisation d'un résultat possible.
- On dit que cet événement est aléatoire lorsque sa réalisation est soumise au hasard.
- **Exemples**:
  - Obtenir 5 en lançant un dé
  - Amener face en lançant une pièce de monnaie,…



# Notation ensembliste

- L'ensemble de tous les résultats possibles, on le note Ω et appelé ensemble fondamental.
- Les événements sont des parties (des sous-ensembles) de Ω, sont notés A, B, C,…

# Définitions de probabilité

- **Fréquentielle:**

$$\boxed{P(A) = \frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}}$$

- **Axiomatique:**

  À chaque événement *A*, on associe un nombre *P(A)* qui exprime le degré de possibilité de réalisation de l'événement *A* avec $0 \leq P(A) \leq 1$ appelé probabilité de l'événement A vérifiant les propriétés suivantes:
  - $P(\Omega)=1$
  - Si A et B sont deux événements tels que $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

# Variables aléatoires

- Une variable aléatoire notée *X* est une application de l'ensemble fondamental Ω dans l'ensemble *IR* des nombres réels, qui fait correspondre à tout événement *A* un nombre réel.
- **Exemple:**

  Pour l'expérience du lancement d'une pièce de monnaie:

$$X : \Omega \longrightarrow IR$$
$$\{\text{amener pile}\} \longmapsto X(\{\text{amener pile}\})=0$$
$$\{\text{amener face}\} \longmapsto X(\{\text{amener face}\})=1$$

Et on a $P(X=0)=1/2$; $P(X=1)=1/2$

## Variables aléatoires

- Il y a deux types de variables aléatoires:
  - Variable aléatoire discrète
  - Variable aléatoire continue
- Si X prend des valeurs discrètes 0, 1, 2, … elle est dite discrète.
- Si *X* prend des valeurs continues sur tout un intervalle de *IR*, par exemple [*a, b*], elle est dite continue.

## Loi de probabilité

- **Discrète:**

  La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est définie par:
  - Les valeurs que peut prendre X: $x_1, x_2,\ldots,x_n$.
  - Les probabilités de ces valeurs $P(X=x_i)=p_i$

# Exemple

- Pour l'expérience de lancement d'une pièce de monnaie, on a:

  *P(X=0)=1/2*; *P(X=1)=1/2*

  Alors *P(X=0)+P(X=1)=1*
- La loi de probabilité de X est résumée par le tableau suivant:

| $x_i$ | 0 | 1 | $\Sigma p_i$ |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/2 | 1/2 | 1 |

- **Continue:**
  Les valeurs que prendre *X* sont continues, alors la probabilité de ces valeurs est une fonction continue *f*, appelée fonction densité de probabilité.
- **Propriétés de la densité:**
  - La fonction f est à valeurs positives sur l'ensemble de définition *D* de la variable aléatoire X
  - La fonction f est nulle en dehors de D l'ensemble de définition de X.
  - L'intégrale de f sur D l'ensemble de définition de X est égale à 1.

$$\int_D f(x)dx = 1$$

# Espérance mathématique:

- Discrète:
- L'espérance mathématique d'une v. a. discrète X, notée E(X) est:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

- Continue:
- L'espérance mathématique d'une v. a. continue X, est donnée par:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

# Propriétés de l'espérance

- Soient *X* et *Y* deux v. a., et α et β deux réels quelconques, alors:

$$E(\alpha X+\beta)=\alpha E(X)+\beta$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(X-Y)=E(X)-E(Y)$$

# Variance et écart-type

- La variance d'une v.a. X, notée Var(X) est définie par:

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

- Ou encore:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$