Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire
Tétouan

Année Universitaire : 2008/2009
Filière : Sc. Éco. & Gestion
Semestre : Troisième (S3)
Module : Méthodes Quantitatives II
Élément : Mathématiques II

Contrôle de rattrapage
(Durée 1 heure)

Exercice 1 :

Soi la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Monter que M est inversible.
2) Vérifier que $M^3 - 7M^2 + 4M - I = O$ avec O est la matrice nulle d'ordre 3.

En déduire une expression de M^{-1} en fonction de $I,\ M$ et M^2 ; et calculer à partir de cette expression la matrice inverse M^{-1}.

Exercice 2 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1) Diagonaliser la matrice A.
2) Résoudre le système $\begin{cases} y + z = 1 \\ x - 3y + z = -4 \\ 3x - 3y + z = -2 \end{cases}$ par la méthode de diagonalisation (c'est-à-dire en utilisant la question 1)).

2008/2009

Maths II

Correction du Contrôle de Rattrapage

Ex 1 :

1) $\det M = 1 \neq 0 \Rightarrow M^{-1}$ existe.

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 12 & 31 & 22 \\ 7 & 18 & 13 \\ 6 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 77 & 197 & 142 \\ 45 & 115 & 83 \\ 38 & 97 & 70 \end{pmatrix}$

et on vérifie que $M^3 - 7M^2 + 4M = I$

$\Rightarrow \boxed{M^{-1} = M^2 - 7M + 4I}$

Finalement $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ex. 2 :

1) le polynôme caractéristique de A est :

$$\boxed{(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)=0}$$

Donc les valeurs propres de A sont :

$\boxed{2,\ 1 \text{ et } -1}$

le spectre est $\boxed{\operatorname{Spec} A = \{2, 1, -1\}}$

A admet 3 valeurs propres $\neq$, donc elle est diagonalisable

$$A \sim \boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{D = P^{-1} A P}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{K}$$

$$D = P^{-1} A P \Rightarrow P D P^{-1} = A$$

$$\Rightarrow \boxed{A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}}$$

$$A X = K \Rightarrow X = A^{-1} K$$

$$\Rightarrow \boxed{X = P D^{-1} P^{-1} K}$$

$$\boxed{\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3/2 \\ z = -1/2 \end{cases}}$$