Université Abdelmalek Esaâdi

Faculté polydiciplinaire

Tetouan

Cours
Algébre II

Professeur

Dr. Hossain Yakhlef

Programme

1. Espaces vectoriels et systèmes linéaires :
   a. Espaces vectoriels. Sous espaces vectoriels .
   b. Independence linéaire. Base et dimension, Combinaison linéaire, Somme directe. Coordonnés.
   c. Résolution des systèmes linéaires.

2. Application linéaire :
   a. Type de matrice important. Rang, déterminant, matrice inverse.
   b. Application linéaire. Application linéaire et indépendance linéaire.
   c. Isomorphismes et coordonnés. Représentation matricielle d'une application linéaire, changement de base.

3. Espace muni d'un produit scalaire
   a. Produit scalaire, Norme, Orthogonalité.
   b. Projection orthogonal.
   c. Base orthonormale, Méthode de Gram Schmidt changement de base orthonormales.
   d. Diagonalisation orthogonal. Matrice symétrique.

Chapitre 1 : **Espace vectoriels et systèmes linéaires.**

I - Espaces vectoriels. Sous espaces vectoriels

A) Espace vectoriel

1 –Définition

Soit V un ensemble muni de deux lois : +, .

1) Loi interne + : $\forall v, w \in V$, on a $v + w \in V$,
2) Loi externe. : $\forall v \in V, \forall k \in \Re$, on a $k.v \in V$,

Exemple

$V = \Re^2; \quad \Re^2 = \Re \times \Re = \{(x, y) : x, y \in \Re\}$

V est un espace vectoriel muni des lois $+, .$

$+ : (x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$

$. : \quad k.(x, y) = (k.x, k.y)$

De plus, l'espace vectoriel vérifie une série de propriétés.

3) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$
4) $\exists 0 \in V; \quad 0 + u = u + 0 = u \quad \forall u \in V$.
5) $\forall u \in V, \ \exists w \in V$ (on la note aussi $-u$), tel que $u + w = 0$
6) $(u + v) + w = u + (v + w); \quad \forall u, v, w \in V$
7) $(a * b).v = a.(b.v) \quad \forall a, b \in \Re; v \in V$
8) $a.(u + v) = a.u + a.v \quad \forall a \in \Re, u, v \in V$
9) $(a + b).u = a.u + b.u \quad \forall a; b \in \Re, u \in V$
10) $1.u = u \quad \forall u \in V$

Exemple :

I. $(\Re^2, +', .)$ munis des lois interne et externe définis a continuation, est-il un espace vectoriel ?

$+'$: $\quad (x, y) +' (z, w) = (x - z, y + w)$

$.$: $\quad a.(x, y) = (ax, ay)$

- Vérifiez les autres propriétés.

II. On définit l'ensemble

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \Re \right\}.$$

On vérifie que $(M_2, +, .)$ est un espace vectoriel.

1) $+ : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$

2) $. : k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k.a & k.b \\ k.c & k.d \end{pmatrix}$

- Vérifions les autres propriétés :

3) $u + v = v + u$?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4) Existe t – il l'élément neutre ($\exists ?\ 0$) tel que $0 + u = u + 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5) $u + (-u) = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) $(u+v)+w = u+(v+w)$

$$\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ j & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+i & b+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix}$$

7) $(a \times b).v = a.(b.v)$

$$a \times b \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \times b).a_1 & (a \times b).b_1 \\ (a \times b).c_1 & (a \times b).d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.(b.a_1) & a.(b.b_1) \\ a.(b.c_1) & a.(b.d_1) \end{pmatrix}$$

$$= a.\begin{pmatrix} b.a_1 & b.b_1 \\ b.c_1 & b.d_1 \end{pmatrix}$$

8) $a.\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] = a.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + a.\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

9) $(a+b).\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$

10) $1.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

__Exercice :__

On considère l'ensemble $M_2{}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} : b, c, d \in \Re \right\}$ et on définit la loi interne

par $+ : \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & bf \\ cg & hd \end{pmatrix}$

Vérifiez que $\left(M_2^{'},+,.\right)$ est un espace vectoriel

B) Sous espaces vectoriels

Définition

Soit V un espace vectoriel. W Un ensemble inclus dans E ($W \subset V$).

W est un sous espace vectoriel de V si seulement si :

$$\begin{aligned} &\forall u, v \in W, \qquad u + v \in W \\ &\forall a \in \Re, v \in W, \qquad a.v \in W \end{aligned}$$

Remarque

Les propriétés 3-10 sont satisfaites du fait que $W \subseteq V$

Exemple : $u + v = v + u$ car $u, v \in W \subset V$.

Exemple

1) $V = \Re^2,\ W = \{x;1\} : x \in \Re)$.
   W est un sous espace vectoriel.

2) $V = \Re^2,\quad W = \{(x,1) : x \in \Re\}$
   $(x,1) + (y,1) = (x + y, 2) \notin W$ W n'est pas un sous espace vectoriel.

3) $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \Re\right\}$
   Vérifiez que $(M,+,.)$ est un sous espace vectoriel

$$+ : \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & 0 \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + e & 0 \\ b + f & c + g \end{pmatrix}$$

$$.\quad : a\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a^b & a^c \end{pmatrix}$$

II - Independence linéaire. Base et dimension

A) Combinaison linéaire

Définition

Soient $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n \in V$ et $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in \Re$.

On appelle $v = a_1u_1, a_2u_2, \ldots\ldots, a_nu_n$ combinaison linéaire de $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$.

Exemple 1 :

Le vecteur $(1,2,4)$ Est-il une combinaison linéaire de $(1,1,1)$ et $(0,1,3)$?

On doit trouver $a_1, a_2 \in \Re$ tel que :

$$(1,2,4) = a_1(1,1,1) + a_2(0,1,3).$$

C.-à-d. : $(a_1, a_1, a_1) + (0, a_2, 3a_2) = (1,2,4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = 1 \end{cases}$$

Exemple 2 :

Le vecteur $(1,2,4)$ Est-il une combinaison linéaire de $(0,1,1)$ et $(0,1,3)$?

Non, En effet supposons le contraire, c.à.d. que $(1,2,4) = a_1(0,1,1) + a_2(0,1,3)$ et par suite on a $1 = a_1.0 + a_2.0 = 0$ (absurde).

B) Independence linéaire

Définition

- Les vecteurs $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n \in V$ sont linéairement indépendants si seulement si :

$$[a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots\ldots.. + a_nu_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots\ldots\ldots = a_n = 0]$$

- Les vecteurs $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n \in V$ sont linéairement dépendants s'ils existent $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in \Re$ non tous nul (au moins un scalaire différent de zéro), tel que : $a_1u_1, a_2u_2, \ldots\ldots, a_nu_n = 0$

Exemple :

1) $(1,1)$ est $(1,0)$ sont-ils linéairement indépendant. ?

$$a_1(1,1) + a_2(1,0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2 = 0$$

Et par suite $(a_1, a_2) = (0,0)$.

2) $a_1(4,0) + a_2(0,1) + a_3(2,3) = 0 \Rightarrow (4a_1 + 2a_3, a_2 + 3a_3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{2}{4}a_3 = -\frac{1}{2}a_3 \\ a_2 = -3a_3 \end{cases}$$

$$a_3 = 2$$
$$a_1 = -1$$
$$a_2 = -3$$

Ainsi, on a trouvé $(a_1, a_2, a_3) = (-1,-3,2)$ tel que

$a_1(4,0) + a_2(0,1) + a_3(2,3) = 0$

Donc $(4,0), (0,1), (2,3)$ sont linéairement dépendant.

C) Système générateur.

Définition

On dit que $\{u_1, u_2, \ldots., u_n\}$ est un système générateur de V, si pour tout élément $v \in V$ on a $v = \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + \ldots + \alpha_nu_n$, avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n \in \Re$.

Exemple :

1) $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$ Donc $\{(1,0),(0,1)\}$ est un système générateur.

2) $\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ est un système générateur de $\Re^2$ car

$$(x,y)=x(1,0)+y(0,1)+z(1,1)$$

3) $\{(1,0)\}$ n'est pas un système générateur.

D) Base.

Définition :

Une base est un système générateur linéairement indépendant.

Théorème :

Tout espace vectoriel admet une base.

E) Dimension

Définition :

La dimension de l'espace vectoriel V est le nombre de vecteurs que contient une base.

Exemple :

On considère l'espace vectoriel $M_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \Re\right\}$.

o $\begin{pmatrix} a & b \\ e & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ est un système générateur de M_2.

o $x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\\ z=0\\ t=0\end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

Finalement, $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ alors est une base de M_2, et on a dim(M_2)=4.

Définition

Soit $B=\{u_1,u_2,....u_3\}$ une base de V. donc $\forall v\in V$ tel on a $v=x_1u_1+x_2u_2+.....+x_nu_n$.

$x_1,x_2,....x_n$ s'appellent les coordonnés du vecteur v dans la base B.

Exemple :

On considère le système $\{(1,1),(1,-1)\}$. On a $(x,y)=a(1,1)+b(1,-1)$, et par suite

$$\begin{cases} a+b=x\\ a-b=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2a=x+y\\ 2b=x-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{x+y}{2}\\ b=\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$$

Ainsi, $(x,y)=\frac{x+y}{2}(1,1)+\frac{x-y}{2}(1,-1)$.

Conclusion :

$\{(1,1),(1,-1)\}$ est un système générateur.

On suppose que $a(1{,}1)+b(1,-1)=(0{,}0)\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=0$.

Par suite $(1\,,1\,)$, $(1\,,-\,1\,)$ sont linéairement indépendants.

Finalement, $\{(1\,,1\,), (1\,,-\,1\,)\}$ est une base de $\Re^2$.

Exemple :

Considérons $M_4=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,b,c,d \in \Re\right\}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les coordonnés de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

sont $(a\;,\;b\;,\;c\;,\;d\;)$.

__**Remarque :**__

Tout espace vectoriel de dimension n est « équivalent » à $\Re^n$.

Exemple 1 :

Dim $\Re^2 = 2.$

Soit V un espace vectoriel de dimension n, donc il admet une base $B=\{u_1, u_2, ...u_n\}$. Donc

$\forall v \in V,\; v = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n$.

On considère $\Re^n$ et y un vecteur $x \in \Re^n$.

$x = x_1(1{,}0,....,0) + x_2(0{,}1,....0) + ... + x_n(0{,}0,.....,1)$

$=(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Donc on peut identifier V avec $\Re^n$.

Exemple 2 :

- $V = M_2$, $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $x \in \Re^4$
  $x = (a,b,c,d) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,0,1)$

$$2v = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

2 x = 2(a, b, c, d)= (2a, 2b, 2c, 2d) $\Leftrightarrow$ $2v = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$

Définition :

Soient w_1, w_2 deux sous espaces vectoriels de V. la somme directe :

$$w_1 \oplus w_2 = \{v \in V : v = V_1 + V_2 \,/\, v_1 \in w_1; v_2 \in w_2\}$$

Exemple :

$V = \Re^3$

$w_1 = \{(x,0,0) \in \Re^3\};$ $\qquad$ $w_2 = \{(0,0,z) \in \Re^3\};$

$w_1 \oplus w_2$ Plan XZ = $\{(x,0,z) \in \Re^3; x, z \in \Re\}$.

Remarque :

$w_1 \oplus w_2 \neq w_1 \cup w_2$

Définition :

On considère un ensemble des vecteurs $\{u_1, u_2, \ldots u_n\} \subset V$. On appelle le rang de $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$ au nombre maximal de vecteurs indépendants dans $\{u_1, u_2, \ldots u_n\}$.

Exemple :

$$\{(1,0), (0,1), (1,1)\} \subset V = \Re^2$$

- (1,0), (0,1) sont deux vecteurs indépendants
- (1,0), (0,1), (1,1) sont dépendants.

Rang $\{(1,0), (0,1), (1,1)\} = 2$

Exemple :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

On peut vérifier que rang(S)=3.

<u>Remarque :</u>

Rang $\{u_1, \ldots\ldots\ldots u_n\} \leq$ Dim V.

<u>Définition :</u>

Soit $A \in M_{n,m}$. On appelle le rang de A égale au nombre maximal de ligne ou colonne linéairement indépendant. (Les lignes sont vues comme n-vecteurs de $\Re^n$) et (Les colonnes sont vues comme m-vecteurs de $\Re^m$).

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 vecteur de $\Re^3$; 2 vecteur de $\Re^2$

Rang $A \leq \min \{n, m\} = 2$

Rang (A)=2

2-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Rang (A)=1.

3- METHODE DE GAUSS :

$$A_1 = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 & - \\ - & u_n & - \end{pmatrix} \approx\approx \quad A_2 = \begin{pmatrix} - & u_1 & - \\ - & u_2 + \alpha_2 \times u_1 & - \\ - & u_n + \alpha_n \times u_1 & - \end{pmatrix},$$

$$Rg\left(A_1\right) = Rg\left(A_2\right)$$

C) Résolution des systèmes linéaires.

Un système de n-équations et m-variables inconnues, est un ensemble des équations de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nm}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nm}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} \in \Re$ sont les coefficients du système linéaire, x_i sont les inconnues et les b_i sont les termes indépendants.

Résoudre le système, c'est trouver les valeurs de $x_1, x_2, \dots\dots x_m$ vérifiant les équations antérieurs.

Les systèmes sont classifiés de la manière suivante :

- Système incompatible : s'il n'admet pas de solution.
- Systèmes compatible : s'il admet au moins une solution.

- Compatible déterminé : s'il admet un nombre fini de solution.
- Compatible indéterminé : s'il admet un nombre infini de solution.

Exprimons le système sous sa forme matricielle:

Le système antérieur peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A.X = B$$

A est dite matrice du système $(A|B) = \left(a_{ij} \quad \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$

<u>Théorème de Rouche-Frobenius :</u>

Le système AX=B est compatible $\Leftrightarrow \quad Rg(A) = Rg(A|B)$

De plus si le système est compatible, et soient $r = Rg(A) = Rg(A|B)$, m le nombre de variable inconnues, alors

1- Si r=m $\Rightarrow$ le système est compatible et déterminé.

2- Si r <m $\Rightarrow$ le système est compatible et indéterminé, c.-à-d. qu'il admet un nombre infini de solutions dépendant de (m-r) paramètres.

<u>Méthode de Gauss :</u>

Si dans un système des équations linéaire,

- On inter change l'ordre des équations,
- On multiplie une équation par un scalaire non-nul,

- On ajoute à une équation une combinaison linéaire des équations restante ; alors on obtient un système équivalent au système initial (les deux systèmes ont les mêmes solutions). Sur ces propriétés se base la méthode de Gauss.

Exemple 1:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-z=0 \\ -x+2y+z=2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ -3y-3z=-6 \\ -z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

Exemple 2 :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-z=0 \\ 2x+2y-z=3 \\ x+y+az=3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & a-1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{array}\right)$$

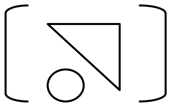
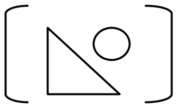
i) Si a=1 ($r = Rg(A) = Rg(A|B) = 3$) le système admet une seule solution.

ii) Si $a \neq 1 \begin{cases} rg(A) = 3 \\ rg(B) = 4 \end{cases} \rightarrow$ le système est incompatible et il n'admet pas de solution.

Chapitre 2

Application linéaire

I- Type de matrice

-  : matrice triangulaire supérieure.
-  : matrice triangulaire inférieure.
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: matrice identité.
- Si $A = A^T$: A est symétrique. Exemple : A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
- Si $A = -A^T$:A est antisymétrique. Exemple : A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- Si $A * A^T : I$: A orthogonal. Exemple : A=$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- A est une matrice nilpotente d'indice n si $A \neq 0$, $A^2 \neq 0$,......, $A^{n-1} \neq 0$, $A^n = 0$.

  Exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **Rang de A :**

  Rang(A) : le nombre maximal de ligne ou colonnes linéairement indépendants.
- **Déterminant :**

  Pour calculer le déterminant,

  $$\rightarrow \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{21}a_{12}$$

  Règlement de Sarrus :

  $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

  Développer selon une ligne ou une colonne.

  En utilisant la règle de Gauss

Propriété 1

Si deux lignes ou colonnes sont égaux ou proportionnels donc det(A)=0.

Propriété 2.

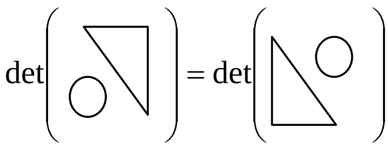
$$\det\begin{pmatrix} U_1+U \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} U \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix}$$

Exemples :

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

b) $\det\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2+\alpha U_1 \\ . \\ . \\ U_n \end{pmatrix}$

Proposition 3.


= Produit des éléments de la diagonal.

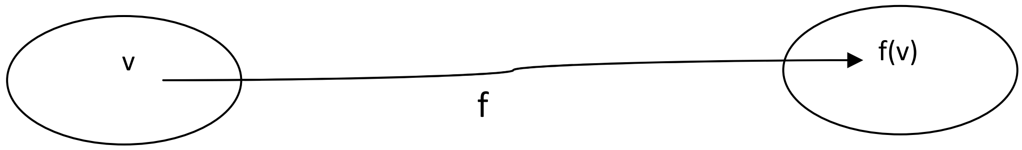
Exemple :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{-6}{3} \end{pmatrix} = (-1).(-3).\left(\frac{-4}{5}\right) = 4.$$

Si $A \in M_{n,n}$;

- $Rg(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- $Rg(A) \langle n \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

II- Application linéaire



Définition :

Soient V et W deux espaces vectoriels. L'application

$$\begin{aligned} f &: V \to W \\ v &\to w = f(w) \end{aligned}$$ est une application linéaire si :

$$\begin{cases} \forall\ \alpha \in \Re, & f(\alpha .v) = \alpha . f(v) \\ \forall\ v_1, v_2 \in V, & f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \end{cases}$$

Exemple :

$V = \Re^2,$ $\qquad W = \Re^3$

$$\begin{aligned} f :\ & \Re^2 \to \Re^3 \\ & (x, y) \to (y, x, x+y) = f(x, y) \end{aligned}$$

f est une application linéaire.

En effet,

$$f(\alpha(x, y)) = f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y, \alpha x, \alpha x + \alpha y) = \alpha(y, x, x+y) = \alpha f(x, y)$$

$$\begin{aligned} f((x, y) + (z, w)) &= f(x+z, y+w) = (y+w, u+z, x+z, y+w) \\ &= (y, x, x+y) + (z, w, z+w) = f(x, y) + f(z, w) \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$V = \Re^2,$ $\qquad W = \Re^3$

$$g : \begin{aligned} & \Re^2 \to \Re^3 \\ & (x, y) \to (yx, x, y) = f(x, y) \end{aligned}$$

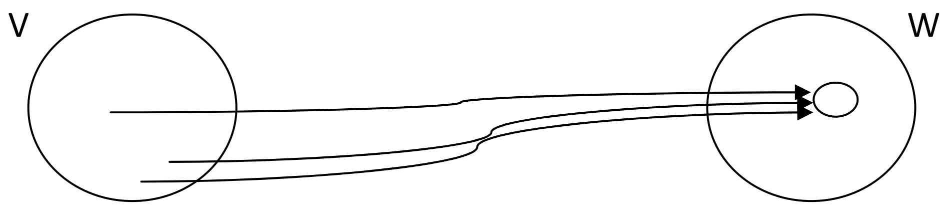
$$f(ax, ay) = (a^2 xy, ay, ax) \neq af(x, y) = a(xy, y, x) = (axy, ay, ax)$$

g n'est pas une application linéaire .

Définition (Kerf)

Définition

$\text{Ker(f)} = \{v \in V : f(v) = 0\}$



Définition

$$\text{Im}(f) = \{w \in W, \exists v \in V ; f(v) = w\}$$

Proposition

Ker(f) est un sous espace vectoriel de W.

Démonstration

Si $v \in Ker(f) \Rightarrow av \in Ker(f).?$

$v \in Ker(f) \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow a.f(v) = 0 \Rightarrow f(a.v) = 0$

Si v_1 et $v_2 \in Ker(f) \Rightarrow v_1 + v_2 \in Ker(f).?$

$v_1, v_2 \in Kerf \Rightarrow f(v_1) = f(v_2) = 0 \Rightarrow f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) = 0$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in Ker(f)$

Exemple

$$f : \begin{array}{l} \Re^3 \to \Re^2 \\ (x, y, z) \to (x + y, y + z, z - x) \end{array}$$

$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \Re^3 : (x + y, y + z, z - x) = (0,0,0)\}$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \\ y = -x \\ z = x \end{cases}$$

$Ker(f) = \{(x,-x,x) = x(1,-1,1); x \in \Re\}$. $Dim(Kerf) = 1$

Exemple

$$f : \begin{matrix} \Re^3 \rightarrow \Re^2 \\ (x,y,z) \rightarrow (x+y,0) \end{matrix}$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{(u,v) \in \Re^2 : (u,v) = (x+y,0) / (x,y,z) \in \Re\}$$

$$= \{(u,0) : u \in \Re\}$$

Proposition

$f : V \rightarrow W$ est une application linéaire

$\Rightarrow f(0) = 0$

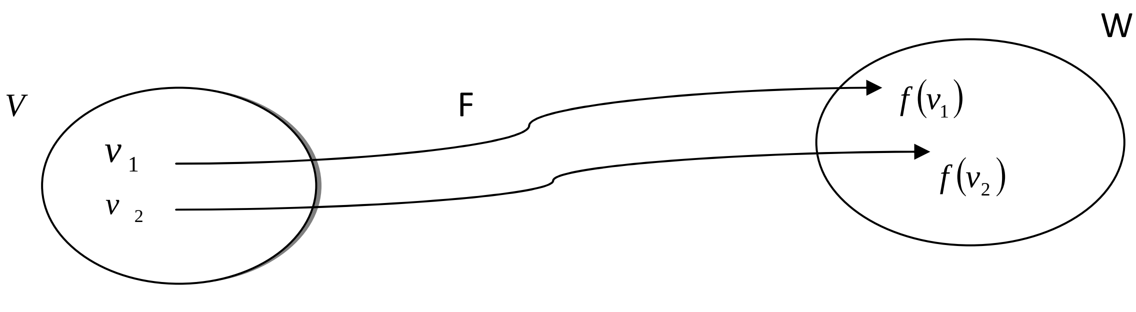
Démonstration

$f(v) = f(v+0) = f(v) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Proposition

Si $f(v_1)$ et $f(v_2)$ sont linéairement indépendants

$\Rightarrow v_1$ et v_2 sont linéairement indépendants.



Démonstration

Si V_1 et V_2 sont linéairement dépendantes $\Rightarrow V_1 = \alpha V_2$

$0 = f(V_1 - \alpha V_2) = f(V_1) - \alpha f(V_2) \Rightarrow f(V_1) = \alpha f(V_2)$

Remarque 1

v_1, v_2 linéairement indépendants $\not\Longrightarrow$ $f(v_1)$ Et $f(v_2)$ sont linéairement indépendants

Exemple :

$$f : \begin{array}{l} \Re^3 \to \Re^2 \\ (x, y, z) \to (0, x + zy) \end{array}$$

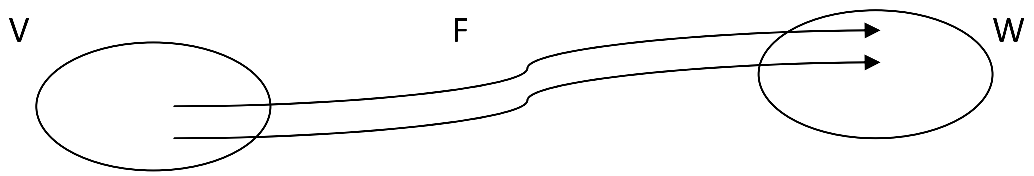
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants. Cependant,

$\begin{array}{l} f(1,0,0) = (0,1) \\ f(0,1,0) = (0,2) \end{array}$ sont linéairement dépendants.

Remarque 2

$f(v_1)$ Et $f(v_2)$ sont linéairement dépendants $\not\Longrightarrow$ v_1 Et v_2 sont linéairement dépendantes

Définition : Application injective



Définition (Application Injective)

$f : V \to W$ est une application injective si seulement si $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

Définition (Application Surjective)

$f : V \to W$ Est une application surjective $\Leftrightarrow \forall w \in W, \exists v \in V : f(v) = w$

Définition (Application Bijective)

$f : V \to W$ Est bijective $\Leftrightarrow$ f est injective et surjective

Exemple 1 :

$$\begin{aligned}&\Re^3 \to \Re^2\\ &(x, y, z) \to (0, x + zy)\end{aligned}$$ f n'est pas injective

$$\begin{aligned}&f(1,0,1) = (0,1)\\ &f(1,0,0) = (0,1)\end{aligned}$$

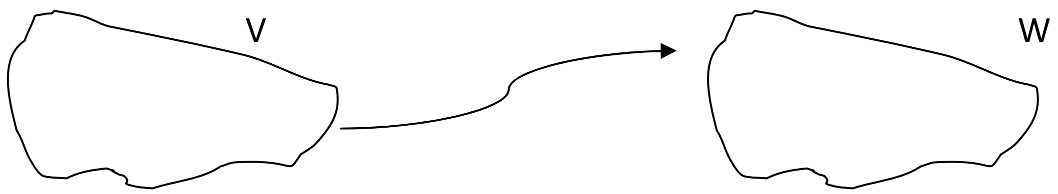
Exemple 2 :

$$f : \begin{aligned}&\Re^2 \to \Re^3\\ &(x, y) \to (-x, -y)\end{aligned}$$ f est une application bijective.

Théorème :

F est une application injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$

Lemme 1 :



Si $DimV = n$ et $u_1, u_2, ..., u_n$ sont linéairement indépendants. $\Rightarrow \{u_1, u_2, ...u_n\}$ est une base de V.

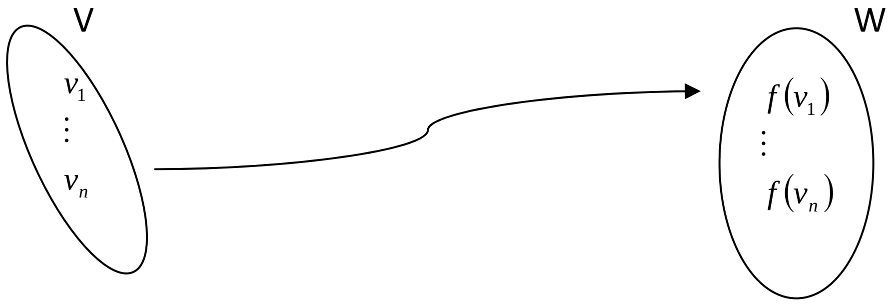
Lemme 2 :

Si $f : V \to U$ est surjective et $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ est une base de $V \Rightarrow \{f(u_1), f(u_2), ... f(u_n)\}$ est une base de V.

Définition Si $f:V\to U$ est une application linéaire bijective, donc elle est dite isomorphisme.

Isomorphisme et coordonnées :

Soit $f:V\to W$ est une application linéaire



* Soit $B_v \equiv \{v_1, v_2, \ldots\ldots. v_n\}$ une base de V.

$$v \in V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots\ldots. \; x_n v_n$$

$$f(v) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots\ldots. \; x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \ldots\ldots\ldots + x_n f(v_n)$$

* Soit $B_w \equiv \{w_1, w_2, \ldots\ldots. w_n\}$ une base de W, donc on exprime $f(v_i)$ dans B_w :

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m1}w_m$$
$$\vdots$$
$$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}w_m .$$

$$f(v) = f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots\ldots. \; x_n v_n) = x_1 f(v_1) + \ldots\ldots\ldots + x_n f(v_n)$$
$$= x_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 \ldots + a_{m1} w_m) + \ldots.. + x_n (a_{n1} w_1 + \ldots + a_{nm} w_m)$$

$$= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \ldots + a_{m1}x_m)w_1 + \ldots\ldots.. + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots. + a_{mn}x_n)w_m$$

$$= y_1 w_1 + y_2 w_2 + \ldots\ldots\ldots. + y_m w_m .$$

On rappelle que :

$x_1, \ldots\ldots\ldots \; .. x_n$ sont les coordonnés de V en B_v et $y_1, \ldots\ldots\ldots \; .. y_n$ sont les coordonnés de $f(v)$ en B_w.

Expression matricielle

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Coord. de f(v) En B_w

Coord. de v en B_v

$Y = AX \Rightarrow$ A : matrice associée à f sur les bases B_w et B_v

Définir $f \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Fixer } B_w \text{ Et } B_v \\ \text{et donner A.} \end{cases}$

Exemple :

$$f : \begin{array}{l} \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}^2 \\ (x, y, z) \to f(x, y, z) = (x + y, y + z) \end{array}$$

B_v : Base canonique de $\mathfrak{R}^3$: $B_v = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B_w : Base canonique de $\mathfrak{R}^2$: $B_w = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\begin{array}{l} f(1, 0, 0) = (1, 0) \\ f(0, 1, 0) = (1, 1) \\ f(0, 0, 1) = (0, 1) \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$f\left(1,1,1\right) = \left(2,2\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

3.1. Produit scalaire, Norme, Orthogonalité

Nous considérons un espace vectoriel $(V,+,\bullet)$, et on rappelle le produit scalaire $*$ définit par :

Définition :

$$* \begin{array}{l} V \times V \rightarrow \Re \\ (v,w) \rightarrow v * w \end{array}$$

Tel que :

i) $u * w = w * u$
ii) $v * (u + w) = (v * u) + (v * w)$
iii) $v * v = 0 \Leftrightarrow v = 0$
iv) $v * (\lambda \bullet w) = \lambda \bullet (v * w)$

<u>Exemple :</u>

1) $\Re^3 \times \Re^3 \rightarrow \Re$

$$Soient \quad v = (x,y,z) \in \Re^3 ; w = (a,b,c) \in \Re^3 \quad et$$

$$(v,w) \rightarrow v * w = (x,y,z).\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = ax + by + cz \in \Re$$

2) $\Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re$

$$((x,y),(a,b)) = (u \ \ ,v \ \ ) \rightarrow u * v = (x,y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = u \ .v^t \ = (x,y).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ax + by$$

3) $\Re^2 \times \Re^2 \rightarrow \Re$

$$((x,y),(a,b)) \rightarrow u * v = (x,y)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2ax + 2by + 2ay + 4by$$

Vérifier que c'est un produit scalaire !!
En effet,

iii)
$$u*u=(x,y)\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2x^2+4xy+4y^2$$
$$=(x+2y)^2+x^2=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x+2y=0\Rightarrow x=y=0\Rightarrow u=(0,0)\end{cases}$$

Remarque :

- La norme $\|v\|=\|(x,y,z)\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{v\cdot v^t}$ est appellé norme euclidienne de v.

Définition

Dans un espace vectoriel $(V,+,\bullet)$, on introduit

$$\|.\|:\begin{array}{l}V\to\Re^+\\ v\to\|v\|=\sqrt{v.v^T}\end{array}$$

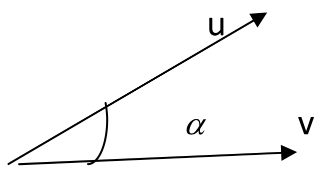
Cette opération est appelée la norme de v.

Proposition

i) $\|v\|=0\Leftrightarrow v=0\to\|v\|$: longueur

ii) $\|\lambda v\|=|\lambda|\times\|v\|$

iii) $\|v+w\|\le\|v\|+\|w\|$



$$\cos(\alpha)=\frac{u*v^T}{\|u\|.\|v\|}$$

Remarque :

u et v sont deux vecteurs orthogonaux si seulement si :

$\cos(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=\pi/2\Rightarrow u*v^T=0$

Exemple :

1) (produit scalaire euclidien)

$u=(1,0);\quad v=(0,2)$

$$u * v = u^T.v = (1,0).\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

2) (autre produit scalaire)

$u=(1,-1);\ v=(1,0)$

$$u * v = (1,-1).\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

u et v sont deux vecteurs orthogonaux par rapport à ce produit scalaire, mais **pas** par rapport au produit scalaire euclidien.

3) $\Re^n \quad u * v = u^T.v; \quad \|u\| = \sqrt{u^T u}$

Définition :

Une base orthogonale $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ de $\Re^n$ est une base où $u_i * u_j = 0 \quad \forall i \neq j$.

Exemple

$\{(2,0);(0,3)\}$ Est une base orthogonale dans $\Re^2$

Définition

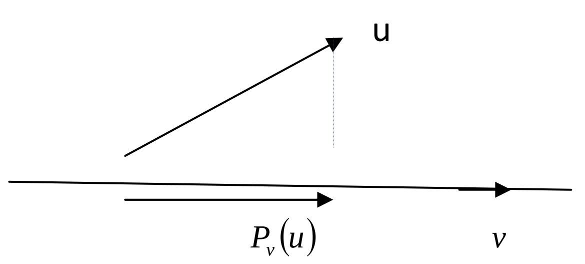
Une base ortho normale $\{u_1, u_2, ...u_n\}$ de $\Re^n$, est une base orthogonale, de plus $\|u_i\| = 1 \ \ \forall i = 1,...,n.$

Exemple :

La base canonique de $\Re^n$.

4.2 Projection Orthogonale.

- Projection d'un vecteur sur une droite



$$\frac{\|P_v(u)\|}{\|u\|} = \cos(\alpha) = \frac{u.v^T}{\|u\| \times \|v\|}$$

$$\|P_v(u)\| = \frac{u.v^T}{\|v\|}$$

$$P_v(u) = \frac{u.v^T}{\|v\|} \bullet \frac{v}{\|v\|}$$

$$P_v(u) = \frac{u.v^T}{\|v\|^2} \bullet v$$

Exemple :

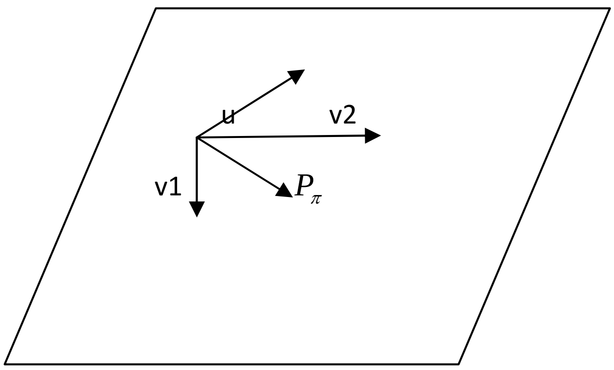
$$u = (2,2)$$
$$v = (3,0)$$

$$P_v(u) = \frac{(2,2).\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}{\left[(3,0)\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right]^2} \bullet \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{6}{9^2}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/9\\0\end{pmatrix}$$

B)Projection d'un vecteur sur un plan

Soient $\{v_1, v_2\}$ une base orthogonale du plan π

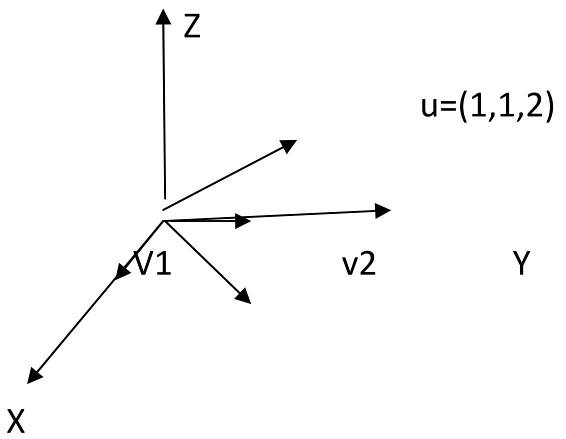


$$P_1(u) = \frac{u\ v_1^{\ t}}{\|v_1\|^2} \bullet v_1$$
: Projection sur v1

$$P_2(u) = \frac{u\ v_2^{\ t}}{\|v_2\|^2} \bullet v_2$$
: Projection sur v2

$$P_\pi(u) = P_1(u) + P_2(u) = \frac{u\ v_1^{\ t}}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{u\ v_2^{\ t}}{\|v_2\|^2} v_2$$

Exemple :



v1= (1,0, 0)   v2= (0, 1,0)

$$P_\pi(u)=\left((1,2,2)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\left((1,1,2).\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

3.2 Projection d’un vecteur sur un HIPER PLAN de $\Re^n$

On prend une base othonormal $\{v_1, v_2, \ldots. v_m\}$ de l’hiperlan H $(m \le n)$ de $\Re^n$ et $u \in \Re^n$.
Donc la projection de u sur H est :

$$P_H(u)=(u\ .v_1^T)\bullet v_1+(u\ v_2^T)\bullet v_2+\ldots\ldots\ldots+(u\ v_m^T)\bullet v_m$$

On prend $u=(x_1, x_2 \ldots. x_n)$ et $v=(y_1, y_2 \ldots. y_n)$ avec $\|v\|=1$

$$P_v(u)=(u.v^T)\bullet v=\left[(x_1+\cdots+x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right]\bullet\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)y_1\\(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)y_2\\\vdots\\(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)y_n\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}y_1{}^2+y_1y_2+\cdots+y_1y_n\\y_2y_1+y_2{}^2+\cdots+y_2y_n\\\vdots\\y_ny_1+y_ny_2+\cdots+y_n{}^2\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}}_{u}=(v.v^T)u$$

Définition :

$P_v = v.v^t$ est une matrice de projection sur v (v est un vecteur uniatire).

Propriétés :

$$P_v{}^T.P_v=(v.v^T)^T.(v.v^T) \;=v.\underbrace{v^T.v}_{=1}.v^T=v.v^T=P_v.$$

$$P_v{}^T.=(v.v^T)^T\,v.v^T=P_v.$$

Définition :

Toute matrice P qui vérifie $\begin{cases}P^T=P\\P^2=P\end{cases}$ s'appelle matrice de projection.

En générale, si on a une base $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ d'un sous espace vectoriel de R^n $(V=\langle v_1,v_2,\cdots,v_m\rangle)$ avec $\|v_1\|=\|v_2\|=\cdots=\|v_m\|$ et $v_i.v_j{}^t=0,\forall i\neq j$ c.a.d. que $\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ est une base orthonormale de V, alors la matrice

$$v_1{}^T.v_1+v_2{}^T.v_2+\cdots+v_m{}^T.v_m$$

est une matrice de projection, et projete sur l'espace vectoriel $(V=\langle v_1,v_2,\cdots,v_m\rangle)$.

Exemple :

1.- $v=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}});\ \|v\|=1.$

La matrice de projection sur v ou sur la droite $\{(x,x)/\,x\in R\}$ est

$$P = v^T.v = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_v(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

2.- On considère l'espace vectoriel R^3 et soit $\{v_1, v_2\} = \{(1.0.0), (0.1.0)\}$ une base orthonormale du plan $(\Pi = \langle v_1, v_2 \rangle)$.

$$P_\Pi = v_1^T.v_1 + v_2^T.v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_\Pi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

__Définition :__

La meilleure approximation d'un vecteur $u \in R^n$ a un sous espace vectoriel $S \subset R^n$, est la projection de u sur S : $P_S(u)$; c.a.d. si $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ est une base orthonormale de S, alors

$$P_S = v_1^T.v_1 + v_2^T.v_2 + \cdots + v_m^T.v_m$$

3.3 Bases orthonormales : Méthode de Gram-Schmidt

__Théorème :__

De toute base $B = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de R^n, on peut obtenir une autre base $B' = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ orthonormale.

Démonstration :

$$\begin{array}{ccccccc} B & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & B' \\ \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} & \rightarrow & \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} & \rightarrow & & \rightarrow & \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \end{array}$$

1. $u_1 \rightarrow w_1 = u_1 \rightarrow v_1 = \dfrac{w_1}{\|w_1\|}.$

2. $v_1, u_2 \rightarrow w_2 = u_2 - P_{v_1}(u_2) \rightarrow v_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|}.$

$$v_2 = \frac{u_2 - (v_1^T . v_1) u_2}{\|w_2\|}.$$

3. $v_1, v_2, u_3 \rightarrow w_3 = u_3 - P_\Pi(u_3) \rightarrow v_3 = \dfrac{w_3}{\|w_3\|}.$

$$v_3 = \frac{u_3 - (v_1^T . v_1) u_3 - (v_2{}^T v_2) u_3}{\|w_3\|}$$

$\vdots$

m).
$$v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}, u_m \rightarrow$$
$$w_m = u_m - (v_1^T v_1) u_m - (v_2^T v_2) u_m \cdots - (v_{m-1}^T v_{m-1}) u_m$$
$$v_m = \frac{w_m}{\|w_m\|}.$$

__Exemple :__

$u_1 = (1,1); \;\; ; u_2 = (1,2)$

$$\begin{array}{ccccccc} B & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & B' \\ \{u_1, u_2\} & \rightarrow & & \{w_1, w_2\} & & \rightarrow & \{v_1, v_2\} \end{array}$$

$$w_1 = (1,1); \;\; ; v_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1).$$

$$w_2 = u_2 - v_1^T v_1 u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}.$$

3.4 Diagonalisation orthogonale. Matrices symétriques

$$A = \underbrace{P}_{les\ colones:\ vecteurs\ propre\ de\ A} .D.P^{-1}, \quad A \in R^{n\times n}$$

Si ces vecteurs forment une base orthonormale de R^n , alors $P.P^T = P^T P = I.$

Toujours, on peut prendre les vecteurs propres v et tels que

$$\|v\| = 1 \Rightarrow P^{-1} = P^T \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

__Théorème :__

Si $A = A^T$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont les valeurs propre de $A \Rightarrow v_1.v_2{}^T$ où $v_1, \ v_2$ sont les vecteurs propre associées a $\lambda_1 \ \ et \ \ \lambda_2.$