Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année universitaire : 2010/2011
Sciences économiques et Gestion
Semestre 3

Contrôle final d'Algèbre I
Durée: 2heures

Exercice 1 : Calculer le rang des matrices suivantes :

1.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2.
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que :
$$M = PDP^{-1}$$

Exercice 3 : On considère la matrice :
$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice N et en déduire qu'elle est inversible.
2. Calculer l'inverse de la matrice N.
3. Déterminer, par la méthode matricielle, la solution du système :
$$\begin{cases} 2x_1 & & + & x_3 & = & \alpha \\ x_1 & + \; x_2 & + & x_3 & = & \beta \\ x_1 & & + & 2x_3 & = & \gamma \end{cases}$$
en fonction des paramètres réels α, β, γ.

Exercice 4 : On considère les vacteurs de $\mathbb{R}^3$:
$$U(a) = (2, a, 0); \quad V(a) = (a, 0, 1) \quad \text{et} \quad W(a) = (a, 1, -1) \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer le paramètre a de manière que les vacteurs $U(a), V(a)$ et $W(a)$ soient linéairement dépendants. Trouver la relation qui existe alors entre eux. Montrer qu'alors deux de ces vecteurs sont orthogonaux.
2. Montrer que les vecteurs $U(0), V(0)$ et $W(0)$ constituent une base de $\mathbb{R}^3$.

Bon courage !

Correction du contrôle final d'Algèbre I

Exercice 1 :

1.- A est de format (3,4), alors $rg(A) \leq 3$

On calcul un déterminant d'ordre le plus élevé que l'on peut extraire de A, soit, par exemple, le déterminant d'ordre 3 suivant :

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

donc $rg(A) = 3$

2.- B est une matrice carrée d'ordre 3, donc, on peut calculer son déterminant

$$\det B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

si on développe suivant la 1ère ligne

Alors $\det B = 0$ donc B n'est pas inversible, d'où elle n'est pas de plein rang $\Rightarrow rg(B) < 3$

On calcul, maintenant, les déterminants d'ordre 2 extraits de la matrice B

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-4 = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(B) = 2$$

Exercice 2 :

1.– On a : $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 6 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)$$

Soit $\det(M-\lambda I) = (5-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)$

et par conséquent les valeurs propres de M sont :

-1, 2 et 5

2) On peut donc affirmer que M est diagonalisable puisqu'elle possède trois valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

Déterminons les sous-esp. propres associés :

$\underline{\lambda = -1}$: $MX = -X \iff \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -4x-6y = -x \\ 3x+5y = -y \\ 3x+6y+5z = -z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x-6y = 0 \\ 3x+6y = 0 \\ 3x+6y+6z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$E_{-1} = \{(2y, -y, 0) \ / \ y \in \mathbb{R}\}$

$\underline{\lambda = 2}$: $MX = 2X \iff \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x-6y=2x \\ 3x+5y=2y \\ 3x+6y+5z=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x-6y=0 \\ 3x+3y=0 \\ 3x+6y+3z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ x=z \end{cases}$$

$$E_2=\{(x,-x,x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$$

$\lambda=5$:

$$MX=5X \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 5z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x-6y=5x \\ 3x+\cancel{5y}=\cancel{5y} \\ 3x+6y+\cancel{5z}=\cancel{5z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z \text{ quelconque } \in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$E_5=\{(0,0,z)\ /\ z\in\mathbb{R}\}$$

La matrice diagonale $\boxed{D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$

et la matrice inversible de passage est $\boxed{P=\begin{pmatrix} +2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

L'utilisation d'une méthode d'inversion donne

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait que l'on a alors $D=P^{-1}MP$ i-e : $M=PDP^{-1}$

Exercice 3 :

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1°) $\det N = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ N est inversible

2°) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det N} \, {}^t\mathrm{com}\, N$, on trouve :

$$N^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3°) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = \alpha \\ x_1 + x_2 + x_3 = \beta \\ x_1 + 2x_3 = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow NX = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et N la matrice en considération.

et comme $\det N \neq 0$, le système admet une solution unique (c'est un système de CRAMER) :

$$X = N^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}(2\alpha - \gamma) \\ x_2 = \frac{1}{3}(-\alpha + 3\beta - \gamma) \\ x_3 = \frac{1}{3}(-\alpha + 2\gamma) \end{cases}$$ avec α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$

Exercice 4 :

1°) le système des vecteurs $u(a)$; $v(a)$; $w(a)$ est linéairement dépendants si et seulement si le déterminant formé par les composantes de ces vecteurs est nul.

$$\begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} = -(2-a^2) + (a^2)$$

$$= -2 + a^2 + a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } -1$$

Pour $a = 1$: $u(1) - v(1) - w(1) = 0$ et $v(1).w(1) = 0$

Pour $a = -1$; $u(-1) + v(-1) + w(-1) = 0$ et $v(-1).w(-1) = 0$

2°) Pour $a = 0$; $u(0)$, $v(0)$ et $w(0)$ sont indépendants et ils sont en nombre de trois (dans $\mathbb{R}^3$) donc ils forment une base de $\mathbb{R}^3$.