Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan
Département de Statistique et Informatique

Année Universitaire : 2011/2012
LF Sciences Économiques & Gestion
Semestre 3
Module : Méthodes Quantitatives III

Contrôle final d'Algèbre I

Durée : 1 heure 30 min

Problème n°1 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer leurs rangs.
2. Sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leurs inverses.
3. Calculer leur produit.
4. Chercher leurs transposées et la transposée de leur produit.
5. Vérifier que ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$

Problème n°2 :

On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est une matrice orthogonale.
2. Calculer le déterminant de M.
3. Donner l'inverse de M.
4. Chercher les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Problème n°3 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A et B sont deux matrices semblables et déterminer leur matrice de passage P.
2. Montrer que A et B sont deux matrices inversibles et calculer leurs inverses A^{-1} et B^{-1}.
3. Montrer que A^{-1} et B^{-1} sont aussi deux matrices semblables et déterminer leur matrice de passage.

Bon courage !

Correction du contrôle final d'Algèbre (linéaire) I

Problème n° 1 :

1°) rg(A) ?

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

On développe suivant la 2^{eme} colonne :

$$\det A = (-1)^4 \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 7 = 1 \neq 0$$

A est une matrice de pleine rang. $rg(A) = 3$

rg(B) ?

Une définition du rang d'une matrice, c'est le nbre max. des vecteurs ligne ou colonne de **B** linéairement indépendants. On remarque que tous les vecteurs lignes de **B** sont liés, $L_2 = L_1 + L_3$

B a au moins un élément non nul, donc $rg(B) = 1$

2°) $\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inversible

par contre B n'est pas inversible (d'ailleurs on peut calculer $\det B = 0$!).

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{com}\, A$$

$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} 4 & -54 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 15 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -54 & 1 & 15 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3°)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -6 & -12 & -6 \\ 15 & 30 & 15 \end{pmatrix}$$

4°)

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t(AB) = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 15 \\ 8 & -12 & 30 \\ 4 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

5°)

$${}^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 & 15 \\ 8 & -12 & 30 \\ 4 & -6 & 15 \end{pmatrix} = {}^t(AB)$$

La relation est bien vérifiée.

Problème n°2 :

1°) On pose $c_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

les vecteurs colonnes de M. On a :

$c_1 \cdot c_2 = 0$; $c_2 \cdot c_3 = 0$ et $c_3 \cdot c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

et $\|c_1\|^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

$\|c_2\|^2 = 1^2 = 0$; $\|c_3\|^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Donc M est une matrice orthogonale.

2°) $\det M = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

On développe selon la 3ème ligne :

$\det M = 1\,(-1)^5 \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{vmatrix} = -\left(-\frac{2}{4} - \frac{2}{4}\right) = 1$

3°) M matrice orthogonale, son inverse est égal à sa transposée $M^{-1} = {}^tM = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$

4°) $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

Développons suivant la 3ème ligne :

$$\det(M-\lambda I) = (-1)^5 \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} - \lambda(-1)^6 \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}-\lambda & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 1 - \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda^2\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda^3$$

L'équation caractéristique de M est donc :

$$\lambda^3 - \lambda^2\frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = 0$$

qu'on peut factoriser ainsi :

$$(\lambda-1)\left[\lambda^2+\lambda\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1\right]=0$$

l'équation $\lambda^2+\lambda\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1=0$ n'admet pas de racines réelles car son discreminant $\Delta = -\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$ est négatif.

D'où $\lambda = 1$ est la seule valeur propre de M.

Cherchons son sous-espace propre associé E_1 ?

on a : $MX = X \iff \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (1+\sqrt{2})z \\ y = z \end{cases}$$

$$E_1 = \{ ((1+\sqrt{2})z, z, z) / z \in \mathbb{R} \}$$

$$\dim E_1 = 1 \neq 3$$

Donc M n'est pas diagonalisable

<u>Problème n°3 :</u>

1°) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(-1-\lambda) + 12$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

l'équation caractéristique de A a pour racines $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$ (deux racines (valeurs propres) distincts) donc A est diagonalisable d'où elle est semblable à une matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

c'est-à-dire $\exists P$ inversible tq $B = P^{-1} A P$

P ? E_2 ? $AX = 2X \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 2x \\ -6x - y = 2y \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -2x}$$

$E_2 = \{(x, -2x) / x \in \mathbb{R}\}$

E_3 ? $\quad AX = 3X \iff \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 3x \\ -6x - y = 3y \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{2}{3}y$

$E_3 = \{(-\frac{2}{3}y, y) / y \in \mathbb{R}\}$

D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

On peut obtenir aussi

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, ou $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ou $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2°) $\det A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 12 = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$ A inversible

$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow$ B inversible

A^{-1} ? $\qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t\mathrm{Com}\, A$

$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & -1/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

B^{-1} ? $\qquad B^{-1} = \frac{1}{\det B}\, {}^t\mathrm{Com}\, B$

$$\mathrm{com}\, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

3°) on a ; $B = P^{-1} A P$

$$\Rightarrow B^{-1} = (P^{-1} A P)^{-1} = P^{-1}(P^{-1} A)^{-1}$$
$$= P^{-1} A^{-1} P$$

D'où A^{-1} et B^{-1} sont aussi semblables pour la même matrice de passage P.

<u>Autre méthode</u> : $\det(A^{-1} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{6} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$

$$= \lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6}$$

l'éq. carac. $\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6} = 0$ a deux racines $\lambda = \frac{1}{3}$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$

Donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ semblable à A

et on cherche $E_{\frac{1}{2}}$ et $E_{\frac{1}{3}}$, on trouve

$E_{\frac{1}{2}} = \{(x, -2x) / x \in \mathbb{R}\}$ et $E_{\frac{1}{3}} = \{(-\frac{2}{3}y, y) / y \in \mathbb{R}\}$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = P$$