UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI

SESSION DU PRINTEMPS, 2012
Faculté Polydisciplinaire de Tétouan

MÉTHODES QUANTITATIVES IV
ALGÈBRE II

–

(Durée: 1:30 heures)

NOTE: Répondre a tous les exercices. Les questions de la section A ayant le barème suivant: une réponse juste (1.5 points), réponse fausse (-0.5 points), pas de réponse (0 point). Mettre un cercle sur la lettre de la réponse choisie qui se trouve dans la page 3. La section B est notée sur 15 points et la redaction sur 0.5 points. Votre réponse durant la section B doit être justifiée rigoureusement. Remplir la page 3 et la rendre avec vos réponses et démonstrations.

SECTION A

Il s'agit d'un QCM: Mettre un cercle sur la lettre de la réponse choisie qui se trouve dans la page 3.

1. Méthode de Gauss. Soit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [v_1] \\ [v_2] \\ \vdots \\ [v_{n-1}] \\ [v_n] \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad [v_i] = [a_{i,1} \;\; a_{i,2} \;\; \cdots \;\; a_{i,n}] \quad i = 1, n.$$

On considère les matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} [v_2] \\ [v_1] \\ \vdots \\ [v_{n-1}] \\ [v_n] \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} [v_1] \\ [v_2] \\ \vdots \\ [v_{n-1}] \\ [v_n] + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i [v_i] \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} [v_2] - [v_1] \\ \vdots \\ [v_{n-1}] \\ [v_n] \end{pmatrix}$$

où $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n,n}$. $A_3 \in \mathbb{R}^{n-1,n}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, n-1)$. Choisir la réponse juste:

(a) $rang(A) = rang(A_3)$ si $\det(A) \neq 0$.

(b) $rang(A) \neq rang(A_2)$.

(c) $rang(A) = rang(A_1)$.

CONTINUER

2. Soit $(V, +, .)$ un espace vetoriel réel, et $v_1, v_2, \cdots, v_n$ des vecteurs qui appartiennent a V. Alors $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont linéairement dependant si:

(a) $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \cdots, n), \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \cdots, n\} \ / \ \alpha_i \neq 0.$

(b) $Rang\,\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} = n.$

(c) $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, \cdots, n), \quad \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$

3. Soit $(V, +, .)$ un espace vectoriel reél et $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$. Choisir le réponse juste.

(a) $v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont linéairement independant $\Rightarrow f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$ sont linéairement independant.

(b) $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$ sont linéairement independant $\Rightarrow v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont linéairement independant.

(c) $f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$ sont linéairement dependant $\Rightarrow v_1, v_2, \cdots, v_n$ sont linéairement dependant.

SECTION B

4. (a) Étudier l'existence et l'unicité de la solution du système $Ax = B$ en fonction des paramètres a et b (sans donner la solution) où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & a-3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \tag{1}$$

(5 points)

(b) Résoudre le système $Ax = b$ dans le cas $a = 5$ et $b = 3$ (A et b se trouvent dans (1)). (4 points)

5. Soit $f: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire définie par $f(x, y, z) = (y, 0, z)$.

(a) On prend dans $\mathbb{R}^3$ la base $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$. Trouver la matrice A associée à f dans cette base.

(b) Calculer la matrice A' associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(c) Trouver le sous espace vectoriel $Im(f)$ en donnant une base.

(d) f est elle une application linéaire surjective?.

(e) Trouver le sous espace vectoriel $Ker(f)$ en donnant une base.

(f) f est elle injective?. (6 points)

Nom et prénom du candidat: ____________________ N. Examen: __________

SECTION A

Mettre un cercle sur la lettre de la réponse choisit.

1.	a	b	ⓒ
2.	ⓐ	b	c
3.	a	ⓑ	c

SECTION B

Exercice 4.

(a)

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & a-3 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & a-2 & b+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & a-5 & b-3 \end{bmatrix}.$$

- Si $a \neq 5$ $(a-5 \neq 0)$ alors $Rang(A) = Rang(Ab) = 3$ et donc le système est compatible determiné.
- Si $a = 5$ $(a-5 = 0)$ alors:
  - Si $b = 3$ $(b-3 = 0)$ donc $Rang(A) = Rang(Ab) = 2$ et le système est compatible indeterminé.
  - Si $b \neq 3$ $(b-3 \neq 0)$ donc $Rang(A) = 2$ et $Rang(Ab) = 3$ et le système est incompatible.

Incompatible	Si $a = 5$ et $b \neq 3$
Compatible déterminé	Si $a \neq 5$
Compatible indeterminé	Si $a = 5$ et $b = 3$

(b) Si $a = 5$ et $b = 3$ on aura:

$$Ab \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & a-5 & b-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc le systlème est equivalent a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ -3y-3z & = & -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 3 \\ y & = & 2-z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 3-y-z = 3-(2-z)-z = 1 \\ y & = & 2-z \end{array} \right.$$

Solution: $\boxed{(x,y,z) = (1, 2-z, z) \text{ et } S = \{(1, 2-z, z) :\ z \in \mathbb{R}\}}$.

Exercice 5.

(a)-(b) On a :

$$\begin{array}{lcl} f(1,0,0) = (0,0,0) & & f(0,1,1) = (1,0,1) \\ f(0,1,0) = (1,0,0) & \text{et} & f(1,0,1) = (0,0,1) = \frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \\ f(0,0,1) = (0,0,1); & & f(1,1,0) = (1,0,0) = -\frac{1}{2}(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0). \end{array}$$

Donc

$$\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(c)-(d) $(y_1, y_2, y_3) \in Im(f) \Leftrightarrow \exists (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad A'. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Base de $Im(f)$: $\boxed{B = \{(1,0,0);(0,0,1)\}}$. Surjective?: $\boxed{dim(Im(f)) = 2 < dim\mathbb{R}^3 = 3.}$ Donc f n'est pas surjective.

(e)-(f) $(x_1, x_2, x_3) \in Ker(f) \Leftrightarrow A'. \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{cases} . \ (x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0) = x_1(1, 0, 0).$$

Base de $Ker(f)$: $\boxed{B_2 = \{(1,0,0)\}}$. Injective?: $dim(Ker(f)) > 0$ implique que f n'est pas injective.
