Probabilités et Statistique

Prof. Mohamed El Merouani

Programme

- <u>Calcul des probabilités:</u>
  - Espaces probabilisés
  - Variables aléatoires discrètes et continues
  - Lois usuelles discrètes et continues
- <u>Statistique Appliquée:</u>
  - Convergences stochastiques
  - Approximations des lois
  - Echantillonnage et Estimation
  - Tests statistiques

Espaces Probabilisés

Expérience aléatoire

- On appelle expérience aléatoire une certaine action que si l'on répète plusieurs fois dans des conditions identiques, elle aura plusieurs résultats possibles.

- On peut distinguer les cas possibles des cas favorables, c'est-dire des cas que l'on veut obtenir.

Ensemble fondamental

- L'ensemble de tous les résultats possibles, pour une expérience aléatoire, est appelé ensemble fondamental .
- On le note Ω.
- Un élément ω de Ω est appelé résultat élémentaire.

Evénement

- Un événement est un résultat possible d'une expérience aléatoire.
- On dit que cet événement est aléatoire lorsque sa réalisation est soumise au hasard.
- **Exemples**:
  - Obtenir 5 en lançant un dé
  - Amener face en lançant une pièce de monnaie,…

Notation ensembliste

- Un événement doit toujours être défini avec précision.
- Les événements sont des parties (des sous-ensembles) de Ω, sont notés A, B, C,…

Exemple:

- On lance un dé. L'événement A={Le numéro 5 apparaît} est dit élémentaire (A={5}).
- L'événement B={Un nombre impair apparaît} est un événement composé (B={1,3,5}).

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- Un événement est dit certain s'il arrive nécessairement. On l'identifie en tant que sous-ensemble de Ω, à Ω.
- Un événement est dit impossible s'i n'arrive jamais. On l'identifie au sous-ensemble vide Ø de Ω.
- Un événement A implique un événement B si chaque fois que A est réalisé, B est réalisé. Cela se traduit par la relation d'inclusion

$$A \subset B$$

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- Le contraire d'un événement A (« non A ») est l'événement noté $\overline{A} = \Omega - A$ qui est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé.
- L'événement « A et B » est l'événement qui est réalisé si A et B sont simultanément réalisé. On le note $A \cap B$. En tant que sous-ensemble de Ω c'est l'intersection de A et B.

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- L'événement « A ou B » est l'événement qui est réalisé si et seulement si l'un au moins des deux événements A ou B est réalisé. En tant que sous-ensemble de Ω c'est la réunion $A \cup B$ de A et B.
- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent être réalisés simultanément, c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$

Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste:

- Un événement élémentaire est un événement de la forme $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$.
- $\{\omega\}$ est un sous-ensemble de Ω alors que ω est un élément de Ω.
- L'ensemble d'événements incompatibles $A_1, A_2, \cdots, A_n$ tel que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tous les i,j=1,2,…,n. (i≠j) est appelé système complet d'événements.

Espace probabilisable

- Soit une expérience aléatoire. On peut identifier un événement aléatoire A avec une partie de Ω dont les éléments réalisent A.
- L'ensemble de tous les événements est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω, c'est-à-dire $\mathscr{P}(\Omega)$.

Tribu ou σ-algèbre

- Une classe $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu (ou σ-algèbre) si:

1. $\Omega \in \mathscr{A}$
2. Si A $\in \mathscr{A}$, Alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$, $\quad (\overline{A} = \Omega - A)$
3. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathscr{A}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$.

Le couple (Ω, $\mathscr{A}$) s'appelle espace probabilisable.

Proposition 1

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. On a:

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille (finie ou infinie) d'événements de $\mathscr{A}$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in$ A.
3. Si A $\in \mathscr{A}$ et B $\in \mathscr{A}$, alors A-B $\in \mathscr{A}$ et AΔB $\in \mathscr{A}$.

Démonstration

1. On a $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathscr{A}$ (définition d'une tribu).
2. On a $\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$

   Comme $A_i \in \mathscr{A}$, $\overline{A_i} \in \mathscr{A}$ et $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \in \mathscr{A}$

   D'où $\overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}} \in \mathscr{A}$.
3. Il suffit de remarquer que $A - B = A \cap \overline{B}$

   comme $A \in \mathscr{A}$ et $\overline{B} \in \mathscr{A}$, on a $A \cap \overline{B} \in \mathscr{A}$

Démonstration (suite)

De même, puisque $B - A = B \cap \overline{A} \in \mathscr{A}$.

On écrit que

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \in \mathscr{A}$

Exemple:

Au jet de dé à 6 faces on associe Ω={1,2,3,4,5,6}

Soit l'événement A={Le numéro apparu est un multiple de 3}.

On choisit $\mathscr{A}$={Ø;{3,6};{1,2,4,5};Ω}={Ø;A; Ā;Ω}.

On aurait pu aussi choisir $\mathscr{P}(\Omega)$.

Définition de Probabilité (Axiomatique)

- A chaque événement A, on voudrait associer une mesure de degré de possibilité de réalisation de l'événement *A* lorsqu'on effectue une expérience aléatoire.
- Cette mesure sera notée P(A) avec $0 \leq P(A) \leq 1$
- Cette idée nous conduit à la définition suivante:

Définition de Probabilité (Axiomatique)

On appelle probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$ une application P de $\mathscr{A}$ dans [0,1] satisfaisant aux axiomes:

1. $P(\Omega)=1$
2. Pour toute famille $(A_i)_{i\geq 1}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a: $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est appelé espace probabilisé ou espace de probabilité.

Proposition 2

1. P(Ø)=0
2. Pour tout $A \in \mathscr{A}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. Pour tout A et $B \in \mathscr{A}$ tels que $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$
4. Pour tous A et $B \in \mathscr{A}$,

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B).$$

Démonstration

1. On a $\Omega = \Omega \bigcup \varnothing$

   Donc $1 = P(\Omega) = P(\Omega \bigcup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$

   D'où $P(\varnothing) = 0$

Remarque:

$P(A) = 0$ n'implique pas forcement que $A = \varnothing$

2. On a $\Omega = A \bigcup \overline{A}$

   d'où $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$

Démonstration (suite)

3. On décompose B en deux événements incompatibles: $B = A \bigcup (B - A)$
   D'où $P(B)=P(A)+P(B\text{-}A)$
   Comme $P(B\text{-}A) \geq 0$, on a $P(B) \geq P(A)$.
4. On décompose $A \bigcup B$ en 3 événements incompatibles : $A \bigcup B = (A - B) \bigcup (A \bigcap B) \bigcup (B - A)$
   on a $P(A - B) = P(A) - P(A \bigcap B)$
   et $P(B - A) = P(B) - P(A \bigcap B)$
   D'où $P(A \bigcup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$
   $= P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

21

Exercice

Pour tout A, B, C des sous-ensembles de Ω, calculer la probabilité $P(A \bigcup B \bigcup C)$

Exemple 1

- Pour l'expérience du jet de dé, on sait que $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
- Chaque face a autant de chances qu'une autre d'apparaître. Il est naturel de supposer que les 6 événements élémentaires {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} ont tous la même probabilité 1/6.
- Si on veut trouver la probabilité de l'événement A={le numéro apparu est un multiple de 3}, on écrit que A={3,6} est la réunion des événements incompatibles {3} et {6} et on a:

  $P(\{3,6\})=P(\{3\})+P(\{6\})=1/6+1/6=1/3$

Définition fréquentielle de la probabilité

- La probabilité P définie sur $(\Omega,\mathscr{A})$; où $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k\}$ est un ensemble fini, est dite uniforme si les probabilités $P(\{\omega_i\})$, $i=1,\ldots,k$ sont égales. Cette probabilité, pour un événement A, vaut

$$P(A)=\frac{Card\ A}{Card\ \Omega}$$

- On écrit aussi:

$$P(A)=\frac{nbre\ de\ cas\ favorables}{nbre\ de\ cas\ possibles}$$

Rappels d'analyse combinatoire

Permutations sans répétitions:

- On définit les permutations **sans répétitions** de « n » éléments comme les différentes façons d'**ordonner** « n » éléments **distincts**.

- Le nombre de permutations sans répétitions de « n » éléments est égal à « factorielle n »:

$$n!=1\times 2\times \ldots \times (n-1)\times n$$

Permutations sans répétitions:

Autre définition:

On définit aussi **les permutations sans répétitions** de « n » éléments comme les **bijections** qu'il y a d'un ensemble ayant « n » éléments ($n\in IN^*$) sur lui-même, et on sait qu'elles sont en nombre de n!

Permutations avec répétitions:

- Si les « n » éléments que l'on ordonne **ne sont pas distincts**, on parle de permutations **avec répétitions**.

- Donc les permutations avec répétitions de « n » éléments, ce sont les différentes façons d'ordonner « n » éléments non distincts.

Permutations avec répétitions:

- Le nombre de permutations avec répétitions de « n » éléments non distincts est égal à

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

où n_1 est le nombre de fois que se répète le 1[er] élément, n_2 est le nombre de fois que se répète le 2[ème] élément,…, n_r est le nombre de fois que se répète le r[ème] élément distinct que l'on considère; avec $n_1+n_2+\ldots+n_r=n$.

Arrangements sans répétitions

- On appelle arrangements **sans répétitions** de « p » éléments distincts pris dans un ensemble de « n » éléments distincts (n≥p), les différents façons d'ordonner ces « p » éléments distincts.
- Le nombre d' arrangements sans répétitions de « p » éléments distincts pris dans un ensemble de « n » éléments distincts est égal au nombre que l'on note

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arrangements sans répétitions

Autre définition:

On définit aussi **arrangements sans répétitions** de « p » éléments distincts pris dans un ensemble de « n » éléments distincts comme les **applications injectives** qu'il y a d'un ensemble à « p » éléments (p∈IN*) dans un ensemble ayant « n » éléments (1≤p≤n) et elles sont en nombre de

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arrangements sans répétitions

- Constatons la conséquence immédiate: Le nombre d'arrangements de « p » éléments distincts par « p » est

$$A_p^p = p!$$

(c'est le nombre de permutations sans répétitions de p éléments).

Arrangements avec répétitions

- On appelle arrangements **avec** répétitions de « p » éléments non-distincts pris dans un ensemble de « n » éléments distincts, les différents façons d'ordonner ces « p » éléments non-distincts.

Remarque:

- On n'a pas forcement $p \leq n$; il se peut que $p > n$ à cause des répétitions.

Arrangements avec répétitions

- Le nombre d'arrangements avec répétitions de « p » éléments non-distincts parmi « n » éléments distincts est égal à n^p

Autre définition:

On définit aussi les arrangements **avec répétitions** de « p » éléments non-distincts pris dans un ensemble de « n » éléments distincts, comme **les applications** qu'il y a d'un ensemble à « p » éléments (p∈IN*) dans un ensemble à « n » éléments (n∈IN*).

Combinaisons sans répétitions

- On appelle combinaisons **sans répétitions** de « p » éléments distincts pris dans un ensemble de « n » éléments distincts (0≤p≤n), les différents sous-ensembles de « p » éléments (**non-ordonnés**) que l'on peut former à partir de ces « n » éléments distincts.
- Ils sont égal au nombre que l'on note:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

Propriétés des coefficients C_n^p

Parmi les propriétés des coefficients C_n^p, on a:

- $C_n^0 = 1$ et $C_n^n = 1$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$ en particulier $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

- **Binôme de Newton:**

$$\forall a, b \in IR; \quad \forall n \in IN^*:$$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

- **Nombre de parties (sous-ensembles) d'un ensemble fini:**

  Le nombre de parties d'un ensemble ayant « n » éléments ($n \in IN$) est égal à « 2^n ».

Combinaisons avec répétitions

- On appelle combinaisons avec répétitions de « p » éléments non-distincts pris dans un ensemble de « n » éléments distincts, les différents dispositions non-ordonnées de « p » éléments non-distincts que l'on peut former à partir de ces « n » éléments distincts.
- **Remarque:**

  A cause des répétitions, on peut avoir p>n.

Combinaisons avec répétitions

- Le nombre de combinaisons avec répétitions de « p » éléments choisis parmi « n », est égal à C_{n+p-1}^{p}

Résumé de combinatoire

	Avec ordre (Arrangements)	Sans ordre (Combinaisons)
Sans répétitions	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
Avec répétitions	n^p	$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$

Exemple 2

- Une urne contient 4 boules rouges, 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire 5 boules simultanément.
- On veut calculer la probabilité de l'événement A={Parmi les 5 boules tirées, 2 sont rouges, 1 est blanche et 2 sont noires}.
- L'ensemble fondamental Ω est l'ensemble des parties à 5 éléments de l'ensemble des boules qui est de cardinal 14.

Exemple 2 (suite)

$$Card\ \Omega = C_{14}^{5}$$

$$Card\ A = C_4^2 C_3^1 C_7^2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{C_4^2 C_3^1 C_7^2}{C_{14}^{5}} = 0{,}189$$

Remarque:

- On peut supposer que Ω peut être un ensemble **infini dénombrable**: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_i,\ldots\}$
- La probabilité d'un événement se calcule à partir des probabilités des événements élémentaires $P(\{\omega_i\})$ vérifiant $0 \leq P(\{\omega_i\}) \leq 1$ et

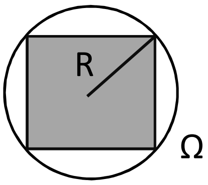
$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\{\omega_i\}) = 1$$

La notion de probabilité uniforme peut être étendue de la façon suivante:

- Soit Ω une partie de IR^2 de surface S et A une partie de Ω de surface S’.
- On lance un projectile dans Ω et on cherche la probabilité qu’il tombe dans A.
- Cette probabilité est proportionnelle à la surface de A.
- On a, donc, $$P(A) = \frac{S'}{S}$$

Exemple 3

- On lance un projectile sur un cercle de rayon R. Trouver la probabilité que ce projectile tombe dans un carré A inscrit dans le cercle.



- On a: aire de $\Omega=\pi R^2$ et aire de A $=\left(R\sqrt{2}\right)^2$, d’où $$P(A)=\frac{2}{\pi}$$

Suite d'événements

Suite d'événements décroissante:

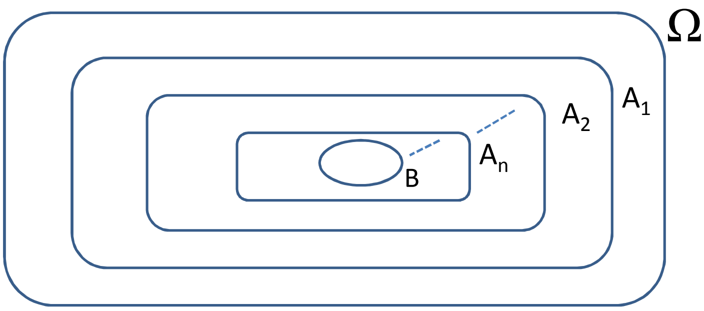
- Une suite d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ est dite décroissante si $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$

Suite d'événements croissante:

- Une suite d'événements $(A_n)_{n\geq 1}$ est dite croissante si $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$

Théorème 1 de passage à la limite

- Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante d'événements telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B$ alors $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(B)$



Démonstration

- Comme $A_{n+1} \subset A_n \ (n \geq 1)$, les événements Ω-A_1, A_1-A_2, A_2-A_3,…sont deux à deux incompatibles et leur réunion vaut $\overline{B}$ d'où:

$$P(\overline{B}) = P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_3) + \cdots$$

- On peut écrire

$$P(\overline{B}) = \lim_{n\to\infty}\left[P(\Omega - A_1) + P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_3) + \cdots + P(A_{n-1} - A_n)\right]$$

- Comme

$$(\Omega - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1} - A_n) = \overline{A}_n$$

Démonstration (suite)

- Comme

$$(\Omega - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup (A_{n+1} - A_n) = \overline{A}_n$$

On en déduit $\quad P(\overline{B}) = \lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n)$

En remarquant que $\quad P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

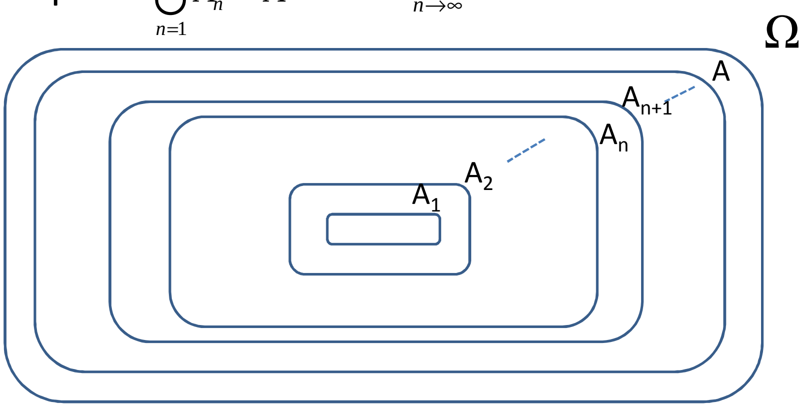
et $\quad P(\overline{A}_n) = 1 - P(A_n)$

on obtient $\quad P(B) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

$\blacksquare$

Théorème 2 de passage à la limite

- Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'événements telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$ alors $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$



Démonstration

- Comme $A_n \subset A_{n+1}, (n \geq 1)$, on a :

$$A = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \ldots$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \ldots$$

- Les événements $A_1, (A_2 - A_1), (A_3 - A_2), \ldots$ sont deux à deux incompatibles et

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} [P(A_1) + P(A_2 - A_1) + \ldots + P(A_n - A_{n-1})] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

car $A_n = A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup \ldots \cup (A_n - A_{n-1})$

■

Probabilité conditionnelle:

- Soit un espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P) et un événement A tel que P(A)>0.
- On probabilité conditionnelle de l'événement B sachant A l'application de $\mathcal{A}$ dans [0,1], notée P(B/A) et définie par:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Justification de l'utilisation de probabilité:

- 0≤P(B/A)≤1, $\forall B \in$ A,

On a $(A \cap B) \subset A$ et $P(A \cap B) \leq P(A)$

d'où $0 \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B/A) \leq 1$

- $P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

Justification de l'utilisation de probabilité (suite):

- Soit $(B_i)_i$ une famille d'événements de $\mathscr{A}$ deux à deux incompatibles, on a:

$$P\left(\bigcup_i B_i / A\right) = \frac{P\left[\left(\bigcup_i B_i\right) \cap A\right]}{P(A)} = \frac{P\left[\bigcup_i (B_i \cap A)\right]}{P(A)}$$

Les événements $(B_i \cap A)$ sont deux à deux incompatibles car

$$(B_i \cap A) \cap (B_j \cap A) = (B_i \cap B_j) \cap A = \varnothing; \quad \forall i \neq j$$

Justification de l'utilisation de probabilité (suite):

d'où:

$$P\left(\bigcup_i B_i / A\right) = \frac{\sum_i P(B_i \cap A)}{P(A)} = \sum_i \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \sum_i P(B_i / A)$$

$P(./A)$ est donc bien une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Remarque:

Analogiquement, on peut définir:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{avec } P(B)>0$$

- On déduit alors que

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

et

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

D'où

$$P(A/B) \cdot P(B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

Théorème des probabilités composés

Exemple:

- On lance à la fois deux dés. La somme des points obtenus est égale à 8.
- Calculer la probabilité que les deux dés aient donné le même numéro.
- On a Ω={(i,j)/i,j=1, 2, 3, 4, 5, 6} et Card Ω=36.
- Soit l'événement

  A={(i,j)∈Ω/i+j=8}={(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}

et l'événement B={(i,j)∈Ω/i=j}={(1,1),(2,2),…,(6,6)}

Exemple (suite):

On a $P(A) = \frac{5}{36}$

et $P(A \cap B) = P(\{(4,4)\}) = \frac{1}{36}$

Il vient $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/36}{5/36} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

On remarque que $P(B) = \frac{6}{36} = 0{,}167$

Evénements indépendants:

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Remarques:

1. Si P(A) et P(B) sont différents de zéro.

   Les événements A et B sont indépendants si la probabilité de réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation ou de la non-réalisation de l'autre,

   c'est-à-dire P(A/B)=P(A) ou P(B/A)=P(B)

Remarques:

2. Soient B un événement quelconque et A un événement tel que $P(A)$=0.

- Comme $A \cap B \subset A$, on a $P(A \cap B) = 0$ et $P(A). P(B)$=0, donc les événements A et B sont indépendants.

Remarques:

3. Deux événements incompatibles A et B (avec $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$) ne sont pas indépendants.

- En effet, $0<P(A).P(B)$
  alors que $P(A\cap B)=0$

Exemple:

- On lance un dé.
- Soient les événements A={2,5}, B={2,4,6} et C={1,2,4}.
- A et B sont indépendants.
- En effet, $P(A\cap B)=P(\{2\})=\frac{1}{6}$
  et $P(A).P(B)$=(2/6).(3/6)=1/6
- B et C ne sont pas indépendants.
- En effet, $P(B\cap C)=P(\{2,4\})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
  et $P(B)P(C)$=(3/6)(3/6)=1/4≠1/3.

Famille d'événements indépendants:

- Soit (Ω, $\mathscr{A}$, P) un espace probabilisé et soit une famille finie $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'événements.
- Ces événements sont dits **indépendants** (ou **indépendants dans leur ensemble**) si pour toute partie I de l'ensemble {1,2,…,n} on a

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i)$$

Remarque:

Des événements indépendants dans leur ensemble, sont indépendants deux à deux, mais des événements indépendants deux à deux ne sont pas toujours indépendants dans leur ensemble.

Exemple 1:

- On lance deux dés.
- On a $\Omega=\{(i,j)/\ i,j=1,2,\ldots,6\}$
- Soit $A=\{(i,j)\in\Omega/i \text{ est impair}\}=\{(i,j)\in\Omega/i=1,3,5\}$,

  $B=\{(i,j)\in\Omega/j \text{ est impair}\}=\{(i,j)\in\Omega/j=1,3,5\}$

  et $C=\{(i,j)\in\Omega/i+j \text{ est impair}\}$

  $=\{(i,j)\in\Omega/i+j=3,5,7,9,11\}$,

  on a $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$

  $P(AB)=P(AC)=P(BC)=1/4$.

  Les événements A, B et C sont deux à deux indépendants car $P(AB)= P(A)P(B)$; $P(AC)= P(A)P(C)$ et $P(BC)= P(B)P(C)$;

- Mais les événements A, B et C qui forment la famille (A,B,C) ne sont pas indépendants dans leur ensemble,
- En effet, $P(ABC)=0$

  mais $P(A)P(B)P(C)=1/8$

Exemple 2:

- On lance deux dés.
- Soit A={(i,j)ЄΩ/j=1,3,4},

  B ={(i,j)ЄΩ/j=2,3,5}

  et C={(i,j)ЄΩ/i +j=9},

  on a P(A)=P(B)=1/2, P(AB)=1/6, P(C)=1/9

  P(AB)=1/6≠P(A)P(B)=1/4.

  Mais P(ABC)=1/36 et P(A)P(B)P(C)=1/36.

  Cet exemple montre que si pour des événements A,B et C, on a P(ABC)=P(A)P(B)P(C); ceci n'entraîne pas l'indépendance deux à deux de ces événements.

Proposition:

Si A et B sont deux événements indépendants, alors:

1. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Démonstration:

1. On a $P(A\cap\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(A\cap B)$

$$=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)[1-P(B)]$$
$$=P(A)P(\overline{B})$$

Démonstration (suite):

2. On a $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$
$$=P(\overline{A})-P(B)[1-P(A)]$$
$$=P(\overline{A})-P(B)P(\overline{A})$$
$$=P(\overline{A})[1-P(B)]=P(\overline{A})P(\overline{B})$$

Exercice:

Montrer que tout événement est indépendant de tout événement de probabilité 1.

Formule des probabilités totales:

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé,

$(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements et B un événement quelconque. On a:

$$P(B)=\sum_i P(B/A_i)\cdot P(A_i)$$

Démonstration:

On a $\bigcup_i A_i = \Omega$ et $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.

Comme $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_i A_i \right) = \bigcup_i (B \cap A_i)$

avec $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing$ pour $i \neq j$, on a

$$P(B) = P\left(\bigcup_i (B \cap A_i) \right) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B / A_i) P(A_i)$$

■

Exemple:

- On considère deux urnes; la première contient 3 boules blanches et 3 noires et la deuxième contient 4 blanches et 2 noires. On choisit l'une des deux urnes au hasard et on tire sans remise 2 boules de cette urne.
- Calculer la probabilité que les 2 boules tirées soient blanches.

Exemple (solution):

- Soient les événements
- A_i={le tirage se fait de l'urne i}; i=1,2
- et B={les 2 boules tirées sont blanches}. On a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(B/A_i)P(A_i) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2)$$

$$= \left(\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{2} = 0{,}3$$

Formule de BAYES:

Soient (Ω, $\mathscr{A}$, P) un espace probabilisé,

$(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements et B un événement tel que $P(B)\neq 0$. On a:

$$P(A_j / B) = \frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_i P(B/A_i)P(A_i)}$$

Démonstration:

On a $\forall j,\quad P(A_j / B) = \dfrac{P(A_j \cap B)}{P(B)}$

Par la formule des probabilités totale, on peut écrire:

$$P(B) = \sum_i P(B / A_i) \cdot P(A_i)$$

D'où

$$P(A_j / B) = \frac{P(B / A_j) P(A_j)}{\sum_i P(B / A_i) P(A_i)} \quad \blacksquare$$

Exemple:

- On considère trois urnes; la première contient 3 boules blanches et 3 noires, la deuxième contient 4 blanches et 2 noires, la troisième 6 blanches. On choisit l'une des trois urnes au hasard et on tire simultanément 2 boules de cette urne. Sachant que les 2 boules tirées soient blanches, calculer la probabilité qu'elles proviennent de la deuxième urne.

Exemple (solution):

- Soient les événements
  A_i={le tirage se fait de l'urne i}; i=1,2,3
  et B={les 2 boules tirées sont blanches}. On a

$$P(A_2 / B) = \frac{P(B / A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B / A_i)P(A_i)}$$

Or $P(A_i) = \frac{1}{3}, \ (\forall i = 1, 2, 3)$

$$P(B / A_1) = \frac{1}{5}; P(B / A_2) = \frac{2}{5}; \ P(B / A_3) = 1$$

On trouve: $P(A_2 / B) = 0{,}25$

Remarque :

- Les probabilités $P(A_i)$, $P(A_2)$,……,$P(A_n)$ sont les probabilités avant l'expérience aléatoire (elles sont appelées des **probabilités à priori)**.
- Après avoir réalisé l'expérience, supposons qu'il en résulte l'événement B et que l'on connaît ses probabilités conditionnelles $P(B/A_1)$,….,$P(B/A_n)$ (elles sont appelées **des vraisemblances**).
- Le théorème de BAYES nous donne, donc, les probabilités après l'expérience (elles sont appelées des **probabilités à posteriori**) conditionnelles par rapport à l'événement B qui en résulte, $P(A_1/B)$,….,$P(A_n/B)$.