Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

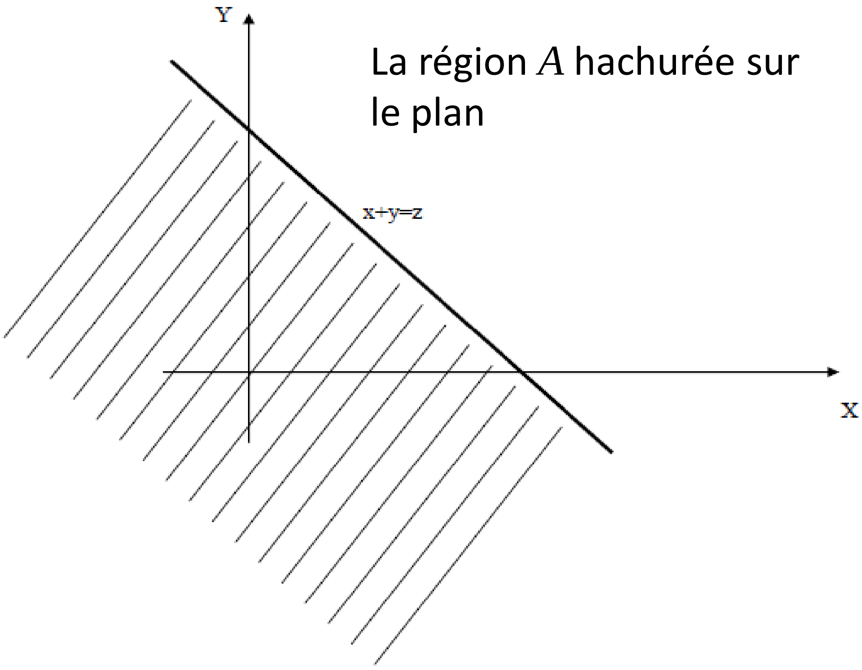
Soit $Z=X+Y$. On veut déterminer la fonction de répartition $F_Z(z)$ de la v.a. Z

On a:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = \iint_A f(x, y) dxdy$$

où

$$A = \{(x, y) \in IR^2 / x + y \le z\}$$



La région A hachurée sur le plan

Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

Si X et Y sont indépendantes, on a:

$$F_Z(z) = \iint_A f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right]dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\right] f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x)\, f_X(x)dx$$

Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

- On peut trouver de la même façon:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\, f_Y(y)dy$$

- En dérivant $F_Z(z)$ par rapport à z on trouve:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)dy$$

ou encore

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)dx$$

Exemple:

Deux v.a. indépendantes X et Y ont pour densités marginales respectives:

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} be^{-by} & si\ y \geq 0 \\ 0 & si\ y < 0 \end{cases}$$

1. Trouver la fonction de répartition conjointe de X et Y.
2. Trouver la densité de probabilité de la somme $Z=X+Y$.

5

Solution:

1. On a: $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} abe^{-au-bv}dvdu$

$$= \left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right)$$

et

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

2. La densité de Z s'écrit:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{\substack{x \geq 0 \\ z-x \geq 0}} ae^{-ax} be^{-b(z-x)}dx$$

Prof. Mohamed El Merouani 6

Si $z \geq 0$, on a: $f_Z(z) = \int_0^z abe^{-bz} e^{-(a-b)x} dx = \frac{ab}{a-b}\left(e^{-bz} - e^{-az}\right)$

Pour $a \neq b$,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{ab}{a-b}\left(e^{-bz} - e^{-az}\right) & si \;\; z \geq 0 \\ 0 & si \;\; z < 0 \end{cases}$$

Pour $a=b$, $f_Z(z) = \int_0^z a^2 e^{-az} dx = a^2 z e^{-az} \quad si \;\; z \geq 0$

et on a donc

$$f_Z(z) = \begin{cases} a^2 z e^{-az} & si \;\; z \geq 0 \\ 0 & si \;\; z < 0 \end{cases}$$

Changement de variables:

- Soient deux v.a. X et Y continues. La densité du couple (X,Y) est $f(x,y)$. On considère la transformation $U=U(X,Y)$ et $V=V(X,Y)$ et la transformation inverse $X=X(U,V)$ et $Y=Y(U,V)$.
- La fonction de densité de probabilité du couple (U,V) est:

$$g(u,v) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = f\left[x(u,v), y(u,v)\right]\left|J\right|$$

Changement de variables:

$$g(u,v) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|J\right|$$

- Où J est le déterminant de Jacobi ou le Jacobien:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Exemple 1:

- A l'aide de la formule précédente on peut démontrer la formule de calcul de la densité de probabilité de $Z=X+Y$ où X et Y sont deux v.a. indépendantes continues.
- En effet, comme on a $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ et en considérant la transformation

$$\begin{cases} x = x \\ z = x + y \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = x \\ y = z - x \end{cases}$$ on obtient:

Exemple 1:

$$g(x,z) = f(x, z-x)\left|J\right| = f_X(x)\, f_Y(z-x)$$

où

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La fonction $h(z)$ densité de probabilité de Z s'écrit, donc:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)dx$$

Exemple 2:

- Soient X et Y deux v.a. indépendantes dont la densité de probabilité du couple (X,Y) est $f(x,y)$. Trouver la densité de probabilité $Z=XY$.
- On considère la transformation:

$$\begin{cases} x = x \\ z = xy \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{z}{x} \end{cases}$$

- Pour x≠0, on a: $g(x,z) = f\left(x, \dfrac{z}{x}\right)\left|J\right|$

Exemple 2:

où $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$

On a, donc, $g(x,z) = f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\left|\frac{1}{x}\right|$

et la densité de Z s'écrit:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{x}\right| f_X(x)\, f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx \quad \blacksquare$$

Exercice à faire!

Soient deux v.a. X et Y dont la densité de probabilité conjointe est donnée par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & \text{si } 0 < x < 2,\ 1 < y < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Trouver la densité de probabilité de $Z=2X+Y$
2. Trouver la densité de probabilité du couple (U,V) où $U=XY$ et $V=XY^2$.