Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

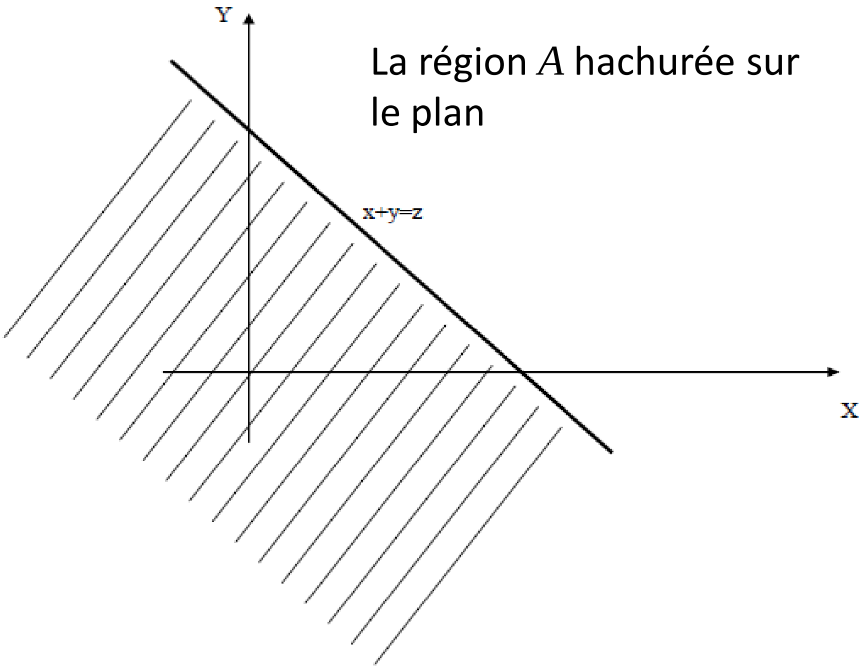
Soit $Z=X+Y$. On veut déterminer la fonction de répartition $F_Z(z)$ de la v.a. Z

On a:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \iint_A f(x, y)dxdy$$

où

$$A = \{(x, y) \in IR^2 / x + y \leq z\}$$



La région A hachurée sur le plan

Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

Si X et Y sont indépendantes, on a:

$$F_Z(z) = \iint_A f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right]dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f_Y(y)dy\right] f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(z-x)\, f_X(x)dx$$

Loi d'une somme de variables aléatoires continues:

- On peut trouver de la même façon:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)\, f_Y(y)dy$$

- En dérivant $F_Z(z)$ par rapport à z on trouve:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\, f_Y(y)dy$$

ou encore

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-x)\, f_X(x)dx$$

Exemple:

Deux v.a. indépendantes X et Y ont pour densités marginales respectives:

$$f_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & si\ \ x \geq 0 \\ 0 & si\ \ x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} be^{-by} & si\ \ y \geq 0 \\ 0 & si\ \ y < 0 \end{cases}$$

1. Trouver la fonction de répartition conjointe de X et Y.
2. Trouver la densité de probabilité de la somme $Z=X+Y$.
3. Calculer $P(X>1,Y<1)$ et $P(X<Y)$.
4. Calculer $P\left(\frac{X}{Y} < z\right)$
5. Calculer la densité de la v.a. $Z = \frac{X}{Y}$

Solution:

1. On a: $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \int_{0}^{x}\int_{0}^{y} abe^{-au-bv}dvdu$

$$= \left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right)$$

et

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right) & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

2. La densité de Z s'écrit:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{\substack{x\geq 0 \\ z-x\geq 0}} ae^{-ax}be^{-b(z-x)}dx$$

Si $z\geq0$, on a: $f_Z(z)=\int_0^z abe^{-bz}e^{-(a-b)x}dx=\frac{ab}{a-b}\left(e^{-bz}-e^{-az}\right)$

Pour $a\neq b$,

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{ab}{a-b}\left(e^{-bz}-e^{-az}\right) & si \;\; z\geq 0\\ 0 & si \;\; z<0\end{cases}$$

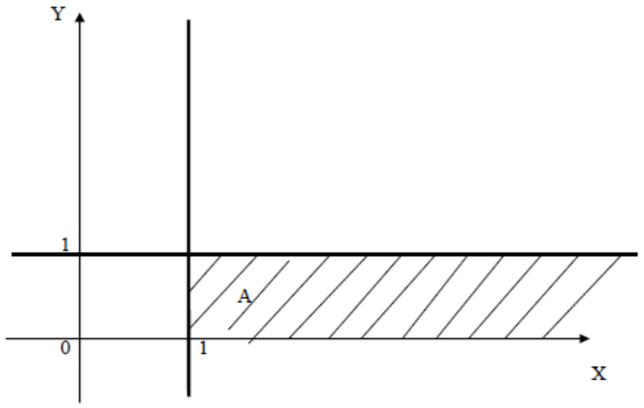
Pour $a=b$, $f_Z(z)=\int_0^z a^2e^{-az}dx=a^2ze^{-az} \quad si \;\; z\geq 0$

et on a donc

$$f_Z(z)=\begin{cases}a^2ze^{-az} & si \;\; z\geq 0\\ 0 & si \;\; z<0\end{cases}$$

3. On calcule $P(X>1,Y<1)=\iint_A f(x,y)dxdy$ où

$A=\{(x,y)\in IR^2 / x>1 et\; y<1\}$



$$P(X>1, Y<1) = \int_1^{+\infty}\left(\int_0^1 be^{-by}dy\right)ae^{-ax}dx$$

$$= \int_1^{+\infty}(1-e^{-b})ae^{-ax}dx$$

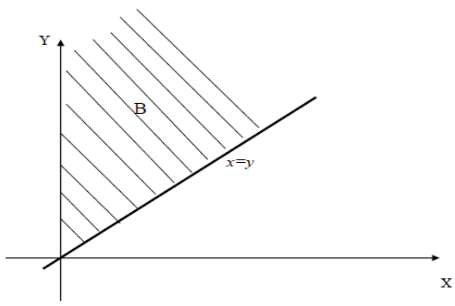
$$= (1-e^{-b})e^{-a}$$

9

- On a $\quad P(X<Y) = \iint_B abe^{-ax}e^{-by}dydx$

où

$$B = \{(x,y) \in IR^2 / x < y\}$$

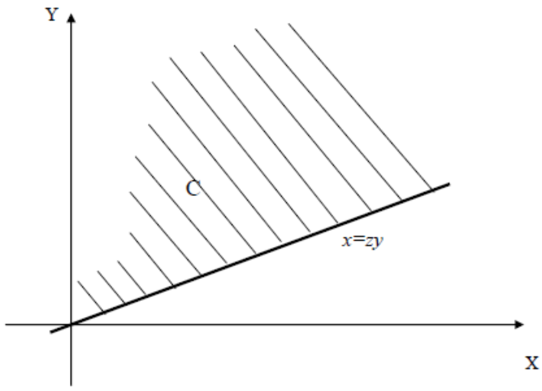


$$P(X<Y) = \int_0^{\infty} a\left(\int_x^{\infty} be^{-by}dy\right)e^{-ax}dx = \int_0^{\infty} ae^{-(a+b)x}dx = \frac{a}{a+b}$$

10

4. On calcule $P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \iint_C f(x,y)dxdy$

où $C = \left\{ (x,y) \in IR^2 / \frac{x}{y} < z \right\}$



$$P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \int_0^{\infty} a \left(\int_{\frac{x}{z}}^{\infty} be^{-by} dy \right) e^{-ax} dx = \int_0^{\infty} ae^{-\left(a+\frac{b}{z}\right)x} dx = \frac{az}{az+b}$$

5. On a:

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P\left(\frac{X}{Y} \le z\right) = \iint_C f(x,y)dydx$$

où z est fixé.

Comme $P\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \frac{az}{az+b} = F_Z(z)$, la densité $f_Z(z)$

de $Z = \frac{X}{Y}$ est donnée, pour z€]0,∞[, par

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{a(az+b) - a^2 z}{(az+b)^2} = \frac{ab}{(az+b)^2}$$

Changement de variables:

- Soient deux v.a. X et Y continues. La densité du couple (X,Y) est $f(x,y)$. On considère la transformation $U=U(X,Y)$ et $V=V(X,Y)$ et la transformation inverse $X=X(U,V)$ et $Y=Y(U,V)$.
- La fonction de densité de probabilité du couple (U,V) est:

$$g(u,v) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|J\right|$$

Changement de variables:

$$g(u,v) = f(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = f\left[x(u,v),y(u,v)\right]\left|J\right|$$

- Où J est le déterminant de Jacobi ou le Jacobien:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Exemple 1:

- A l'aide de la formule précédente on peut démontrer la formule de calcul de la densité de probabilité de Z=X+Y où X et Y sont deux v.a. indépendantes continues.
- En effet, comme on a $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ et en considérant la transformation

$$\begin{cases} x = x \\ z = x + y \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = x \\ y = z - x \end{cases}$$ on obtient:

15

Exemple 1:

$$g(x,z) = f(x, z-x)\left|J\right| = f_X(x)\, f_Y(z-x)$$

où

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

La fonction $h(z)$ densité de probabilité de Z s'écrit, donc:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)dx$$

16

Exemple 2:

- Soient X et Y deux v.a. indépendantes dont la densité de probabilité du couple (X,Y) est $f(x,y)$. Trouver la densité de probabilité $Z=XY$.
- On considère la transformation:

$$\begin{cases} x = x \\ z = xy \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x = x \\ y = \dfrac{z}{x} \end{cases}$$

- Pour x≠0, on a: $g(x,z) = f\left(x, \dfrac{z}{x}\right)|J|$

Exemple 2:

où $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{z}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{x}$

On a, donc, $g(x,z) = f_X(x) f_Y\left(\dfrac{z}{x}\right)\left|\dfrac{1}{x}\right|$

et la densité de Z s'écrit:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{x}\right| f_X(x) f_Y\left(\frac{z}{x}\right)dx \quad \blacksquare$$

Exercice à faire!

Soient deux v.a. X et Y dont la densité de probabilité conjointe est donnée par:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{8} & \text{si } 0 < x < 2,\ 1 < y < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

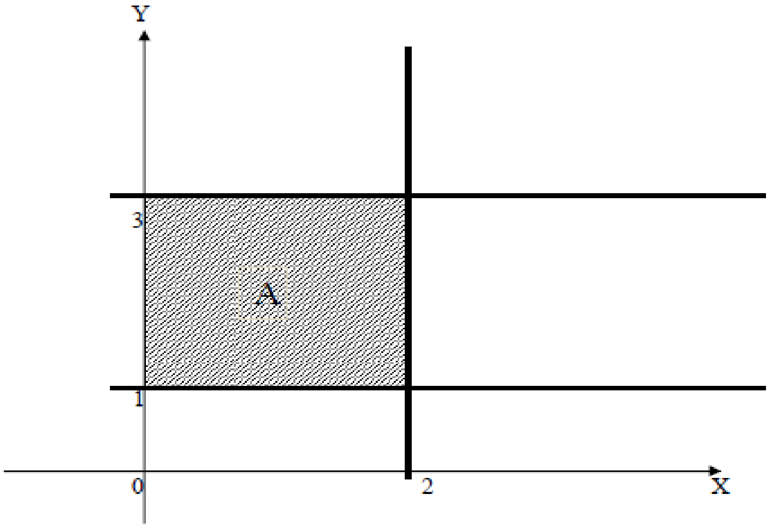
1. Trouver la densité de probabilité de $Z=2X+Y$
2. Trouver la densité de probabilité du couple (U,V) où $U=XY$ et $V=XY^2$.

Corrigés:

1. On considère la transformation $\begin{cases} x = x \\ z = 2x + y \end{cases}$
   ou $\begin{cases} x = x \\ y = z - 2x \end{cases}$

On a $g(x,z) = f(x, z-2x)\left|J\right|$ où $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

L'ensemble $A = \{(x,y) \in IR^2 / 0 < x < 2,\ 1 < y < 3\}$
correspond à $B = \{(x,z) \in IR^2 / 0 < x < 2, 1 < z - 2x < 3\}$



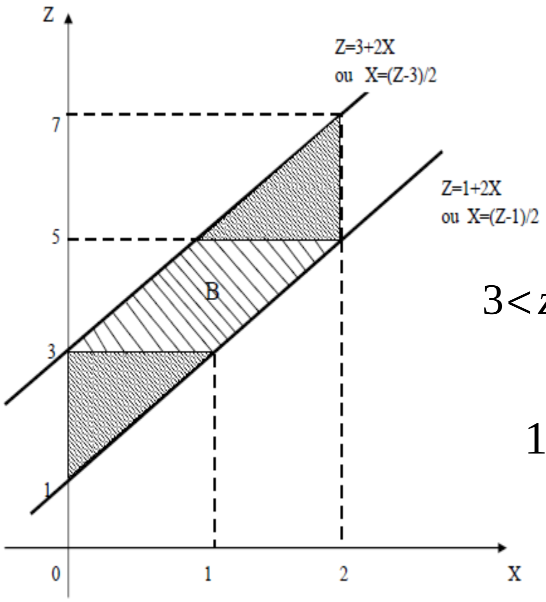
- On obtient, donc,

$$g(x,z)=\begin{cases}\dfrac{x(z-2x)}{8} & \text{si } 0<x<2;\, 1<z-2x<3\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

- La densité de Z sera:

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,z)dx$$

- Alors, il faut distinguer les cas pour z et déterminer les bornes de l'intégrale pour x:



$$5<z<7 \Rightarrow \frac{z-3}{2}<x<2$$

$$3<z<5 \Rightarrow \frac{z-3}{2}<x<\frac{z-1}{2}$$

$$1<z<3 \Rightarrow 0<x<\frac{z-1}{2}$$

Prof. Mohamed El Merouani 23

- Donc

$$g(z)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{z-1}{2}} \frac{x(z-2x)}{8}\,dx \;; & 1<z<3 \\ \displaystyle\int_{\frac{z-3}{2}}^{\frac{z-1}{2}} \frac{x(z-2x)}{8}\,dx \;; & 3<z<5 \\ \displaystyle\int_{\frac{z-3}{2}}^{2} \frac{x(z-2x)}{8}\,dx \;; & 5<z<7 \\ 0 \;; & ailleurs \end{cases}$$

24

- D'où

$$g(z)=\begin{cases}\frac{1}{192}\left(z^3-3z+2\right); & 1<z<3\\ \frac{1}{192}\left(24z+16\right); & 3<z<5\\ \frac{1}{192}\left(-z^3+75z-182\right); & 5<z<7\\ 0 & ;\ ailleurs\end{cases}$$

2. Soit la transformation $\begin{cases}U=XY\\ V=XY^2\end{cases}$ ou

$$\begin{cases}X=\frac{U^2}{V}\\ Y=\frac{V}{U}\end{cases}$$

L'ensemble $A=\{(x,y)\in IR^2\,/\,0<x<2,\ 1<y<3\}$

correspond à

$$C=\left\{(u,v)\in IR^2\,/\,0<\frac{u^2}{v}<2,\ 1<\frac{v}{u}<3\right\}$$

ou

$$C=\{(u,v)\in IR^2\,/\,u^2<2v,\ u<v<3u\}$$

et on a: $g(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)|J|$

où $J = \begin{vmatrix} \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \\ -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{v}$

On obtient, donc,

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{8}\dfrac{u^2}{v}\dfrac{v}{u}\dfrac{1}{v}; & u^2 < 2v,\ u < v < 3u \\ 0\ ; & ailleurs \end{cases}$$

ou

$$g(u,v) = \begin{cases} \dfrac{u}{8v}; & u^2 < 2v,\ u < v < 3u \\ 0\ ; & ailleurs \end{cases}$$