

Contrôle Continu N°1
de Probabilités et Statistiques

Durée : 2 heures

Exercice 1 : (4 points)

Soient trois urnes d'aspect extérieur identique. La première contient a boules blanches et b noires ; la deuxième, c boules blanches et d noires ; la troisième ne contient que des boules blanches. Une personne s'approche au hasard de l'une des urnes et en tire, successivement et sans remise, deux boules.

1°) Trouver la probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches.

2°) Sachant que les deux boules tirées sont blanches, calculer la probabilité qu'elles proviennent de la première urne.

Exercice 2 : (3 points)

Soient a et b deux nombres réels. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F . Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y=aX+b$. (discuter suivant les valeurs du réel a).

Exercice 3 : (5 points)

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } |x| \leq k \\ 0 & \text{si } |x| > k > 0 \end{cases}$$

1°) Trouver la constante k . Dans la suite de l'exercice, on prend pour k la valeur trouvée.

2°) Calculer l'espérance mathématique de X .

3°) Déterminer F la fonction de répartition de X .

4°) Déterminer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $Y=X^2$ et calculer $E(Y)$.

Exercice 4 : (3 points)

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{si } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Donner la densité de probabilité $h(y)$ de la variable aléatoire continue $Y=\sin X$.

Exercice 5 : (5 points)

Soit un couple de variables aléatoires continues (X,Y) . La variable aléatoire X a pour densité de probabilité marginale

$$f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre réel.}$$

La variable aléatoire

$$f_2(y/x) = x e^{-xy} \quad \text{conditionnelle par la valeur donnée de } X=x>0 : \text{ pour } y>0.$$

Y admet une fonction de densité

1°) Donner la fonction de densité conjointe $f(x,y)$ du couple (X,Y) .

2°) Trouver la fonction de densité marginale $f_2(y)$ de la v.a. Y .

3°) Trouver la densité conditionnelle $f_1(x/y)$.