Université Abdelmalek Essaâdi **Année universitaire : 2013/2014**

ENSA de Tétouan **1ère année de cycle ingénieur**

T.D. de Probabilités et Statistiques

Série n°3

Exercice 1:

Soit (X,Y) un couple aléatoire discret dont la loi est donnée par le tableau suivant :

Y \ X	-1	0	1
-2	1/6	1/12	1/6
1	1/6	1/12	1/6
2	1/12	0	1/12

Trouver la loi conjointe du couple (U,V) où $U=|X|$ et $V=Y^2$.

Exercice 2:

Un couple de variables aléatoires (X,Y) possède une densité conjointe $f(x,y)$. Trouver la densité $g(z)$ de leur rapport $Z=\frac{Y}{X}$

Exercice 3:

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues indépendantes ayant la même densité $f(x)=1$ pour $x \in]0,1[$, $f(x)=0$ ailleurs. On considère $Y_1=X_1+X_2$ et $Y_2=X_1-X_2$. Donner la loi conjointe de (Y_1,Y_2).

Exercice 4:

1°)Trouver la loi de répartition de la somme de deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de densités respectives $f_1(x_1)=\lambda e^{-\lambda x_1}$, $(x_1>0)$; $f_2(x_2)=\lambda e^{-\lambda x_2}$, $(x_2>0)$.

2°)Trouver la loi de répartition de la somme de deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de densités respectives $f_1(x_1)=\lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}$, $(x_1>0)$; $f_2(x_2)=\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}$, $(x_2>0)$.

Exercice 5:

Soient deux variables aléatoires continues X, Y à densité conjointe $f(x,y)$.

1°)Trouver la fonction de répartition $G(z)$ et la densité de probabilité $g(z)$ de la plus grande des deux variables $Z=\max\{X,Y\}$.

2°)Trouver la fonction de répartition $H(u)$ et la densité de probabilité $h(u)$ de la plus petite des deux variables $U=\min\{X,Y\}$.

Exercice 6:

1°) On connaît la densité conjointe $f(x,y)$ d'un couple de variables aléatoires continues (X,Y). Trouver la densité $g(z)$ de la différence $Z=X-Y$.

2°) On donne maintenant les densités marginales des variables aléatoires X et Y, que l'on suppose indépendantes : $f_1(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $(x>0)$; et $f_2(y)=\mu e^{-\mu y}$, $(y>0)$. Trouver la densité $g(z)$ de la différence $Z=X-Y$.

Exercice 7:

Une variable aléatoire continue X a pour densité de probabilité : $f(x)=2x$ pour $x \in [0,1]$ et $f(x)=0$ en dehors de cet intervalle. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y=X^2$.

Exercice 8:

Une variable aléatoire continue X a pour densité de probabilité la fonction $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x>0$ $(\lambda>0)$. Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y=e^{-X}$.

Exercice 9:

Une variable aléatoire continue X a pour densité de probabilité la fonction $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ pour $x>0$. Etablir dans quelles conditions existent l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y=e^X$ et quelle est leur valeur ?

Exercice 10:

Une variable aléatoire continue X a pour densité de probabilité la fonction .

$$f(x)=\frac{\cos x}{2};\ \text{pour}\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

1°)Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y=\sin X$.

2°)Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Y=|\sin X|$.

Exercice 11:

1°) La densité d'une variable aléatoire continue X est $f(x)$. On considère la fonction $Y=\min\{X,a\}$, où a est non aléatoire. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire Y sans calculer sa fonction de répartition.

2°) Même question que la précédente, mais X est une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs entières positives à probabilités données par le tableau suivant :

xi	1	2	…	k	…	n
pi	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n

$Y=\min\{X,a\}$, où a est un nombre entier positif on aléatoire compris entre 1 et n ($1<a<n$).

Exercice 12:

Soit une variable aléatoire continue X de densité $f(x)$. Trouver l'espérance mathématique et la variance de la variable $Y=|X|$.

Exercice 13:

Les densités des variables aléatoires indépendantes X et Y sont $f_1(x)$ et $f_2(y)$.

1°)Donner l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire $Z=|X-Y|$.

2°)Trouver l'espérance mathématique et la variance de la plus petite de ces deux variables $U=\min\{X,Y\}$.

Exercice 14:

La densité conjointe d'un vecteur de trois variables aléatoires (X,Y,Z) est $f(x,y,z)$. Ecrire les expressions : 1°) de la densité $f(x)$ de la variable aléatoire X ; 2°) de la densité conjointe $f_{2,3}(y,z)$ des variables aléatoires (Y,Z) ; 3°) de la densité conditionnelle $f_{2,3}(y,z/x)$; 4°) de la densité conditionnelle $f_2(y/x,z)$; 5°) de la fonction de répartition $F(x,y,z)$; 6°) de la fonction de répartition $F_1(x)$ de la variable aléatoire X ; 7°) de la fonction de répartition $F_{1,2}(x,y)$ du couple (X,Y).

Exercice 15:

Soient X_1 ,X_2, X_3 des variables aléatoires continues indépendantes suivant la même loi, de densité :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}; & x>0 \\ 0; & \text{autrement} \end{cases}$$

On considère les variables aléatoires $Y_1=X_1+X_2+X_3$; $Y_2=\dfrac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}$; $Y_3=\dfrac{X_1}{X_1+X_2}$.

Donner la densité conjointe de (Y_1,Y_2,Y_3).

Les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont-elles indépendantes ?