Livre: Algèbre Matricielle
Auteur: Mohamed El Merouani

Solution de l'exercice 2.4 de la page 44

1) $\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

donc M est inversible.

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

3) $M^3 - 3M^2 + 3M = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} +$

$+ 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

donc $M^3 - 3M^2 + 3M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

d'où $\boxed{M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0}$ ou $\boxed{I - 3M + 3M^2 - M^3 = 0}$

donc le système $\{I, M, M^2, M^3\}$ est lié dans l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3.

4) on a : $M^3 - 3M^2 + 3M = I$

donc $M(M^2 - 3M + 3I) = (M^2 - 3M + 3I)M = I$

d'où $\boxed{M^{-1} = M^2 - 3M + 3I}$

5) $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

6) $\begin{cases} 1.x + 0.y + 0.z = 1 \\ 0.x + 1.y + (-2).z = 2 \\ 2.x + 0.y + 1.z = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$

7) On remarque que $N = {}^tM$ (transposée de M)

donc $N^{-1} = ({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$

On peut rappeler ici un théorème :

Théorème : Soit A matrice carrée d'ordre n ; A inversible

Alors $\quad {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

$$NX = B \iff N^{-1}NX = N^{-1}B$$
$$\iff I.X = N^{-1}B$$
$$\iff X = N^{-1}B$$
$$\iff X = {}^t(M^{-1})B$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

l'ensemble des solutions : $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est un singleton (solution unique)

Exercice 2.5 de la page 45

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs définis par :

$$U(a) = (1, 2, a) \quad ; \quad V(a) = (1, 2a, 0) \quad ; \quad W(a) = (0, 1, 0)$$

où a est un paramètre réel.

1) Pour quelles valeurs de a, les vecteurs $U(a), V(a), W(a)$ forment-ils un système libre ?

2) En déduire que les vecteurs $U(1), V(1), W(1)$ constituent une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Donner la décomposition du vecteur $(1, 1, 2)$ sur cette base.

3) Soit la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est une matrice inversible.

4) En déduire que le système suivant admet une solution unique que l'on précisera :

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y =0 \\ y =0 \end{cases}$$

Solution de l'ex 2.5 de la page 45

1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{vmatrix} = a$$
$$+ \quad - \quad +$$

Donc le système $\{U(a), V(a), W(a)\}$ est libre pour $a \neq 0$ et il est lié pour $a=0$: $U(0)=V(0)+2W(0)$

2) $a = 1 \neq 0$; donc $\{U(1), V(1), W(1)\}$ est un système libre et comme ce système comprend 3 vecteurs $= \dim \mathbb{R}^3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$

Soient x, y et z les coordonnées de $(1,1,2)$ dans la base $\{U(1), V(1), W(1)\}$ donc $xU(1)+yV(1)+zW(1)=(1,1,2)$

$$\Longleftrightarrow x(1,2,1)+y(1,2,0)+z(0,1,0)=(1,1,2)$$

$$\Longleftrightarrow (x+y ; 2x+2y+z ; x)=(1,1,2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y+z=1 \\ x=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$$

d'où $(1,1,2) = 2(1,2,1) - (1,2,1) - (0,1,0)$

$$\boxed{(1,1,2) = 2\,U(1) - V(1) - W(1)}$$

3) On remarque que les vecteurs lignes de A sont $U(1)$, $V(1)$, $W(1)$ qui sont indépendants, donc A est une matrice inversible.

4) C'est un système homogène qui s'écrit sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow A.X = 0$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ; donc il y a une solution unique $S = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ∎

Exercice 2.6 de la page 45

1) On considère le système :

$$\begin{cases} x + 2z = u \\ 3x + 4y + 2z = v \\ 5x + 2y + 4z = w \end{cases}$$

où u, v, w sont des paramètres réels. Expliciter chacune des inconnues x, y, z en fonction des paramètres u, v, w.

2) Déterminer l'inverse A^{-1} de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 2.6 de la page 45

1)

$$(I)\begin{cases} x + 2z = u & (1) \\ 3x + 4y + 2z = v & (2) \\ 5x + 2y + 4z = w & (3) \end{cases}$$

$(2)-(1) \Rightarrow 2x + 4y = v - u$

$\Rightarrow \boxed{x + 2y = \frac{v-u}{2}} \quad (*)$

$(1)+(2) \Rightarrow \boxed{4x + 4y + 4z = u + v} \quad (4)$

$(3)-(4) \Rightarrow \boxed{x - 2y = w - (u+v)} \quad (**)$

$(*)+(**) \Longrightarrow 2x = w - u - v + \frac{v}{2} - \frac{u}{2}$

$\Rightarrow 2x = -\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v + w$

$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}w}$

$(1) \Rightarrow 2z = u - x$

$\Rightarrow 2z = u + \frac{3}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}w$

$\Rightarrow 2z = \frac{7}{4}u + \frac{1}{4}v - \frac{1}{2}w$

$\Rightarrow \boxed{z = \frac{7}{8}u + \frac{1}{8}v - \frac{1}{4}w}$

$$② \Rightarrow 4y = v - 3x - 2z$$

$$\Rightarrow 4y = v - 3\left(\frac{-3}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}w\right) - 2\left(\frac{7}{8}u + \frac{1}{8}v - \frac{1}{4}w\right)$$

$$\Rightarrow 4y = v + \frac{9}{4}u + \frac{3}{4}v - \frac{3}{2}w - \frac{7}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}w$$

$$\Rightarrow 4y = \frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v - w$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{8}u + \frac{3}{8}v - \frac{1}{4}w}$$

Donc

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}w \\ y = \frac{1}{8}u + \frac{3}{8}v - \frac{1}{4}w \\ z = \frac{7}{8}u + \frac{1}{8}v - \frac{1}{4}w \end{array} \right\} A^{-1}$$

2) $(I) \iff A.X = U$

avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$(II) \iff X = A^{-1}.U$

d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/8 & 3/8 & -1/4 \\ 7/8 & 1/8 & -1/4 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.7 de la page 46

1)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

A est-elle inversible ?
on a calculer det A, on a trouvé que
det $A = 3 \neq 0$; donc A est inversible

Calcul de A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

avec $A^* = {}^t(\Delta_{ij})$ où (Δ_{ij}) est la comatrice de A

(Δ_{ij}) sera une matrice carrée d'ordre 4 d'éléments Δ_{ij} ; calculons ces éléments (sont au nombre de 16!)

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

développons suivant la 1ère ligne ; on a

$$\Delta_{11} = 1 . (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -(-7-2) = 9$$

Donc $\boxed{\Delta_{11} = 9}$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

développons suivant la 1ère ligne ; on a

$$\Delta_{12} = -\left(1\,(-1)^{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}\right)$$

$$\Delta_{12} = -2 + 14 = +12$$

donc $\boxed{\Delta_{12} = +12}$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

développons suivant la 1ère ligne ; on a

$$\Delta_{13} = 1.(-1)^{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{13} = -7 - 2 = -9$$

donc $\boxed{\Delta_{13} = -9}$

$$\Delta_{14} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

développons suivant la 1ère ligne ; on a

$$\Delta_{14} = -\left(+1\,(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\Delta_{14} = -\left((-5-2) + (4)\right) = +3$$

donc $\boxed{\Delta_{14} = +3}$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

développons suivant la 1ère ligne ; on a :

$$\Delta_{21} = -\left(-1\,(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 1\,(-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. - 1\,(-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right)$$

$$\Delta_{21} = (7-5) - (-7-2) + (-5-2)$$

$$\Delta_{21} = 2 + 9 - 7 = 4$$

donc $\boxed{\Delta_{21} = 4}$

$$\Delta_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

développons suivant la 3ème ligne ; on a :

$$\Delta_{22} = 5 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 7(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{22} = -5(1+2) + 7(1+2) = -15 + 21$$

donc $\boxed{\Delta_{22} = 6}$

de même, on trouve

$\Delta_{23} = -1$

$\Delta_{24} = -1$

$\Delta_{31} = -5$

$\Delta_{41} = 2$

$\Delta_{42} = 3$

$\Delta_{32} = -9$

$\Delta_{33} = 5$

$\Delta_{34} = -1$

$\Delta_{43} = -2$

$\Delta_{44} = 1$

c'est-à-dire la comatrice est :

$$(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & -9 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & -1 \\ -5 & -9 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 4 & -5 & 2 \\ 12 & 6 & -9 & 3 \\ -9 & -1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{cases} 1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 1x_4 = -2 \\ 1.x_1 + 0.x_2 + 1x_3 + 0.x_4 = 1 \\ 2x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 4 \\ 0.x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 17 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}}_{K}$$

avec $\det A = 3 \neq 0$; d'où le système est de CRAMER de solution unique $X = A^{-1} K$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & 4 & -5 & 2 \\ 12 & 6 & -9 & 3 \\ -9 & -1 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -18+4-20+34 \\ -24+6-36+51 \\ 18-1+20-34 \\ -6-1-4+17 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = [illegible]/3 = 2 \end{cases}$$