Espérance mathématique:

v.a. discrète:

- L'espérance mathématique d'une v. a. discrète X, notée E(X) est:

$$E(X) = \sum_i x_i \, P(X = x_i) = \sum_i x_i \, p_i$$

v.a. continue:

- L'espérance mathématique d'une v. a. continue X, de fonction de densité *f* est donnée par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx$$

Propriétés de l'espérance:

Soient X et Y deux v. a., et α et β deux réels quelconques, alors:

$$1°)\, E(\alpha) = \alpha$$

$$2°)\; E(X + \alpha) = E(X) + \alpha$$

$$3°)\; E(\alpha X) = \alpha E(X)$$

$$4°)\, E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$5°)\; E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

$$6°)\; E(X - E(X)) = 0$$

Démonstration:

1°) $E(\alpha)=\alpha$?

La moyenne d'une constante est elle-même!

$E(\alpha)=\alpha.P(X=\alpha)=\alpha.1=\alpha$

2°) $E(X+\alpha)=E(X)+\alpha$?

Cas discret: $E(X+\alpha)=\sum_i (x_i+\alpha)\cdot P(X=x_i)$

$$E(X+\alpha)=\sum_i x_i\cdot P(X=x_i)+\alpha\sum_i P(X=x_i)$$

$$E(X+\alpha)=E(X)+\alpha$$

Cas continu:

$$E(X+\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+\alpha)f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx+\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=E(X)+\alpha$$

Démonstration:

3°) $E(\alpha X)=\alpha E(X)$?

Cas discret:

$$E(\alpha X)=\sum_i \alpha x_i P(X=x_i)=\alpha\sum_i x_i P(X=x_i)=\alpha E(X)$$

Cas continu:

$$E(\alpha X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha xf(x)dx=\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\alpha E(X)$$

Démonstration:

4°) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$?

Cas discret:

$$E(X+Y)=\sum_i\sum_j (x_i+y_j)P(X=x_i,Y=y_j)$$

$$E(X+Y)=\sum_i x_i\left(\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)\right)+\sum_j y_j\left(\sum_i P(X=x_i,Y=y_j)\right)$$

Mais, $\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)$

et $\sum_i P(X=x_i,Y=y_j)=P(Y=y_j)$

$$\sum_j P(X=x_i,Y=y_j)=P\left[\bigcup_j \left((X=x_i)\cap(Y=y_j)\right)\right]$$

$$=P\left[(X=x_i)\cap\left(\bigcup_j (Y=y_j)\right)\right]$$

$$=P[(X=x_i)\cap\Omega]$$

$$=P(X=x_i)$$

Démonstration:

- On obtient, donc,

$$E(X+Y)=\sum_i x_i P(X=x_i)+\sum_j y_j P(Y=y_j)$$
$$=E(X)+E(Y)$$

Démonstration:

4°) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$?

Cas continu:

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dy\right]dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dy\right]dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx\right]dy$$
$$=E(X)+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=E(X)+E(Y)$$

Démonstration:

5°) $E(X-Y)=E(X)-E(Y)$?

$E(X\text{-}Y)=E(X+(\text{-}Y))=E(X)+E(\text{-}Y)=E(X)\text{-}E(Y)$

6°) $E(X-E(X))=0$

$E(X\text{-}E(X))=E(X)\text{-}E(E(X))=E(X)\text{-}E(X)=0$

Propriété (Théorème de transfert):

- **X v.a. discrète:**

Si $Y=\varphi(X)$, alors $E(Y)=\sum_i \varphi(x_i)P(X=x_i)$

- **X v.a. continue:**

Si $Y=\varphi(X)$, alors $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$

Démonstration:

- **X v.a. discrète:**

$$E(Y)=E(\varphi(X))=\sum_j y_j P(\varphi(X)=y_j)$$

Où $\varphi(X)(\Omega)=\{y_1,y_2,\ldots,y_j,\ldots\}$.

Pour j fixé, soit $\varphi^{-1}(y_j)$. On a $\varphi^{-1}(y_j) \subset X(\Omega)$.

On note $\varphi^{-1}(y_j)=\{x_i/i\in I_j\}$, ensemble des x_i ayant même image y_j;

D'où $$E(\varphi(X))=\sum_j y_j \sum_{i\in I_j} P(X=x_i)$$

$$=\sum_j \sum_{i\in I_j} y_j P(X=x_i)$$

Démonstration:

- Donc

$$E(\varphi(X))=\sum_j \sum_{i\in I_j} \varphi(x_i) P(X=x_i)$$

- Mais, dans un cas général, certaines des valeurs $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$,…, $\varphi(x_i)$,…coïncident.
- En regroupant les x_i ayant même image y_j, c'est-à-dire les valeurs qui coïncident et en additionnant leur probabilité, on a:

$$E(Y)=\sum_i \varphi(x_i) P(X=x_i)$$

■

Exemple:

- Soit X v.a. discrète de loi de probabilités:

x_i	-3	0	3
p_i	1/4	1/2	1/4

- En posant $Y=X^2$, d'après la propriété précédente, on a:

$$E(Y)=\sum_i \varphi(x_i)p_i=(-3)^2\frac{1}{4}+0^2\frac{1}{2}+(3)^2\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$$

Exemple (suite):

- Mais, on peut aussi écrire la loi de Y:

yj	0	9
p_j	1/2	1/2

- Dans cet exemple, on a $\varphi^{-1}(0)=0$, $\varphi^{-1}(\{9\})=\{-3,3\}$

$$E(Y)=0\frac{1}{2}+9\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{2}$$

Démonstration:
(Théorème de transfert)

- Dans le cas où X v.a. continue:

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Exemple:

- Soit X une v.a. continue de densité de probabilité:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-x^2\right); & 0\le x\le 1\\ 0 \;; & \text{autrement}\end{cases}$$

- Trouver $E(X^2)$.

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\frac{3}{2}\int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)dx=\frac{1}{5}$$

Propriété:

- Si deux v.a. X et Y sont **indépendantes**, alors on a:

$$E(XY)=E(X).E(Y)$$

En effet, si X et Y sont discrètes, alors:

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_i \sum_j x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)\end{aligned}$$

Car X et Y sont indépendantes.

Propriété (suite):

- On en tire

$$\begin{aligned}E(XY) &= \sum_i \left[x_i P(X = x_i) \sum_j y_j P(Y = y_j) \right] \\ &= \sum_i x_i P(X = x_i) E(Y) \\ &= E(X)E(Y)\end{aligned}$$

- Si X et Y sont continues:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf_X(x)\,f_Y(y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(xf_X(x)\int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy \right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(xf_X(x)E(Y)\right)dx$$

$$= E(X)E(Y) \quad \blacksquare$$

Remarque:

- La réciproque est fausse: $E(XY)=E(X)E(Y)$ n'implique pas l'indépendance de X et Y.

Exemple:

- On considère le couple de v.a. (X,Y) de loi:

$Y \backslash X$	-3	0	3	$P(Y=y_j)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$P(X=x_i)$	1/4	1/2	1/4	1

Exemple (suite):

On a $E(X) = -3\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} = 0$; $E(Y) = -1\frac{1}{4} + 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} = 0$

et $E(XY) = (-1)(-3)0 + (-1)0\frac{1}{4} + (-1)3\times 0 + 0(-3)\frac{1}{4} + 0\times 0\times 0 +$

$$+0\times 3\frac{1}{4} + 1(-3)\times 0 + 1\times 0\frac{1}{4} + 1\times 3\times 0 = 0$$

Mais, l'égalité $E(XY) = E(X)E(Y)$

n'entraine pas l'indépendance de X et Y. Il suffit de vérifier, par exemple, que:

$$P(X=0, Y=1) = \frac{1}{4} \neq P(X=0)\cdot P(Y=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Variance:

- On définit une mesure de dispersion de X autour de son espérance mathématique, dite variance de X.
- La variance d'une v.a. X, notée $Var(X)$ est définie par:

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

- Ou encore:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

#La vérification de cette dernière formule sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Écart-type:

- L'écart-type d'une variable aléatoire X, noté σ(X), est défini comme la racine carrée de sa variance,

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Exemple:

- On lance un dé. On a:

$$P(X = x_i) = \frac{1}{6},\ i = 1, 2, \cdots, 6$$

et $E(X) = 3{,}5$

La variance Var(X) de X sera égale à

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$$

$$= 1^2\frac{1}{6} + 2^2\frac{1}{6} + 3^2\frac{1}{6} + 4^2\frac{1}{6} + 5^2\frac{1}{6} + 6^2\frac{1}{6} - (3{,}5)^2 = 2{,}92$$

et $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{2{,}92} = 1{,}71$

25

Propriétés:

#La démonstration de ces propriétés sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

$\forall a, b \in IR$, on a :

1) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

2) $E\left((X - c)^2\right)$ est minimum quand $c = E(X)$

3) Si X et Y sont indépendantes, alors

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

4) Si X et Y sont indépendantes, alors

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$$

26

Variable centrée réduite:

- Si X est une v.a. non nulle, on appelle variable centrée réduite associée à X la v.a. Z définie par:

$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

- On a $E(Z)=0$ et $Var(Z)=1$.

Prof. Mohamed El Merouani 27

Variable centrée réduite:

- <u>En effet,</u>

$$E(Z) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{E(X - E(X))}{\sigma(X)} = \frac{E(X) - E(X)}{\sigma(X)} = 0$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) =$$

$$= Var\left(\frac{X}{\sigma(X)} - \frac{E(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma^2(X)} Var(X) = 1$$

28

Moments (Cas discrèt):

- Moment d'ordre k d'une v.a. discrète X, noté m_k est:

$$m_k = E\left(X^k\right) = \sum_i x_i^k P\left(X = x_i\right)$$

- Moment centré d'ordre k d'une v.a. discrète X, noté μ_k est:

$$\mu_k = E\left((X - E(X))^k\right) = \sum_i (x_i - E(X))^k P\left(X = x_i\right)$$

Moments (Cas continu):

- Moment d'ordre k d'une v.a. continue X, noté m_k est:

$$m_k = E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

- Moment centré d'ordre k d'une v.a. X, noté μ_k est:

$$\mu_k = E\left((X - E(X))^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$$

Remarques:

- La variance correspond au moment centré d'ordre 2: $Var(X)=\mu_2$
- Comme pour l'espérance mathématique, si la série ou l'intégrale correspondante diverge, les moments peuvent parfois ne pas exister.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev:

- Soit X une v.a. telle que $E(X)$ et $Var(X)$ existent. Pour tout réel $\varepsilon>0$, on a:

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Covariance de deux variables aléatoires:

- La covariance entre deux v. a. X et Y, notée $Cov(X,Y)$, est définie par $Cov(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$
  ou encore $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- **Cas discrèt:**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i\, y_j P(X=x_i, Y=y_j)-E(X)E(Y)$$

- **Cas continue:**

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\ f(x,y)\, dx\, dy - E(X)E(Y)$$

Propriétes:

- Soient X et Y deux v. a. La covariance est une forme bilinéaire symétrique:

1) $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$

2) $Cov(X+Y, Z)=Cov(X, Z)+Cov(Y, Z)$

3) $Cov(\lambda X,Y)=\lambda Cov(X,Y)$

#La démonstration de cette propriété sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Propriétes:

- Si les variables X et Y sont indépendantes, alors
  $\boldsymbol{E(XY)=E(X)E(Y)}$
  et par suite $\boldsymbol{Cov(X,Y)}=0$
- La réciproque n'est cependant pas vraie.

Remarque:

Pour $X=Y$, on retrouve la variance de X comme covariance de (X, X):

$$Cov(X, X)=E[(X\text{-}E(X))(X\text{-}E(X))]$$
$$=E[(X\text{-}E(X))^2]=Var(X)$$

Exemple déjà vu:

- Soit le couple de v.a. (X,Y) de loi:

$Y \backslash X$	-3	0	3	$P(Y=y_j)$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$P(X=x_i)$	1/4	1/2	1/4	1

Exemple (suite):

On a vu que $E(X)=0$; et $E(Y)=0$

et $E(XY)=0$

D'où $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

Mais, X et Y comme on l'a déjà vu ne sont pas Indépendantes . Il suffit de vérifier, par exemple, que:

$$P(X=0,Y=1)=\frac{1}{4}\neq P(X=0)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

Propriétes:

- On a: $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

- Si les variables X et Y sont **indépendantes**, alors, on retrouve:
  $\boldsymbol{Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)}$ **,** résultat déjà vu.

Coefficient de corrélation entre deux v. a. :

- Le coefficient de corrélation entre deux v. a. X et Y, de variances non nulles, noté $\rho(X,Y)$ est définie par:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

- Le coefficient de corrélation varie entre -1 et 1:

$$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#

Inégalité de Schwartz:

- On a: $\left|E(XY)\right| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$

#La démonstration sera donnée comme exercice à faire en T.D.#