Lois de probabilités usuelles discrètes et continues

Lois de probabilités discrètes (suite)

On a vu:

- **Loi de Dirac**
- **Loi de Bernoulli**
- **Loi Binômiale**
- **Loi multinomiale**

Loi hypergéométrique:

- On considère une urne contenant N boules dont a sont blanches et b=N–a sont rouges. On tire de cette urne n boules. (On peut tirer les n boules en même temps ou l'une après l'autre sans remise).
- Soit X la v.a. égale au nombre de boules blanches tirées parmi les n boules. Cette v.a. suit une loi dite hypergéométrique et est notée $H(n,a,b)$.

Loi hypergéométrique:

- Comme $0 \leq X \leq a$ et $0 \leq n - X \leq b$, on a:

$$\max\{0, n-b\} \leq X \leq \min\{a, n\}$$

- Soit un nombre entier k tel que:

$$\max\{0, n-b\} \leq k \leq \min\{a, n\}$$

- On cherche $P(X=k)$. L'ensemble fondamental Ω est constitué de tous les sous-ensembles de n boules que l'on peut tirer de l'urne $\Omega = \mathscr{P}_n(E)$. C'est l'ensemble de parties à n éléments de l'ensemble E des boules. On a $Card\,\Omega = C_{a+b}^{n}$

5

Loi hypergéométrique:

- Le nombre de façons de tirer k boules parmi les a blanches est C_a^k et pour chacune de ces façons il y a C_b^{n-k} manières de tirer $n-k$ boules parmi les boules rouges. Donc:

$$P(X=k) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

- Comme $\sum_k C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n$ on a bien $\sum_k P(X=k) = 1$

Prof. Mohamed El Merouani

6

Loi hypergéométrique:

- Espérance mathématique de $X \sim H(n, a, b)$

$$E(X) = \frac{an}{a+b}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Loi de Poisson:

- On dit qu'une v. a. obéit à une loi de Poisson, si elle est susceptible de prendre toutes les valeurs entières 0,1,2,…,k,…,n, les probabilités associées étant $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$, avec

$$p_k = P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}$$

- λ étant un paramètre positif, et e la base des logarithmes népériens.
- La constante λ s'appelle le paramètre de la loi.
- La loi de Poisson est notée $\mathscr{P}(\lambda)$.

Loi de Poisson:

- Espérance mathématique: $E(X)=\lambda$
- Variance mathématique: $Var(X)=\lambda$
- Ecart-type: $\sigma(X)=\sqrt{\lambda}$
- La loi de Poisson est appelée loi des petites probabilités. On l'utilise pour représenter des phénomènes rares, tels que: nombre d'accidents, nombre de pannes, nombre de déchets dans une fabrication…

Loi géométrique:

- On considère une expérience à deux issues possibles (réalisation de l'événement A ou de l'événement $\bar{A}$). On répète indéfiniment cette expérience jusqu'à ce que A se réalise. Soit X la v.a. égale au nombre de répétitions nécessaires pour la réalisation de A.
- On a: $X(\Omega)=\{1,2,\ldots,n,\ldots\}$ et $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ où p est la probabilité de réalisation de l'événement A.

Loi géométrique:

- On vérifie que c'est bien une loi de probabilité.
- En effet,

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

- Son espérance mathématique est:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Loi binomiale négative:

- Une proportion p d'éléments d'une population possède un certain caractère A. On veut obtenir n éléments de ce type en procédant à une suite de tirage indépendants. Ces tirages s'effectuent avec remise. On désigne par Y le nombre de tirages nécessaires pour obtenir ces n éléments possédant le caractère A. La v.a. $X=Y-n$ est appelée binomiale négative.

Loi binomiale négative:

- On a $X(\Omega)=IN$. On cherche $P(X=i)$.
- Comme n tirages (dont le dernier) ont donné un élément possédant le caractère A et i tirages ont donné un élément ne possédant pas le caractère A, la probabilité d'un tel événement est $p^n(1-p)^i$. Le nombre de ces événements est C_{n+i-1}^{n-1} . On en déduit:

$$\forall i \in X(\Omega),\ P(X=i)=C_{n+i-1}^{n-1} p^n (1-p)^i$$

13

Loi binomiale négative:

- On peut vérifier que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i)=\sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i-1}^{n-1} p^n (1-p)^i=\sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i-1}^{i} p^n (1-p)^i=1$$

- Son espérance mathématique est:

$$E(X)=n\frac{1-p}{p}$$

- Sa variance est: $Var(X)=\dfrac{n}{p^2}(1-p)$

Prof. Mohamed El Merouani 14

Lois de probabilités continues

Loi uniforme:

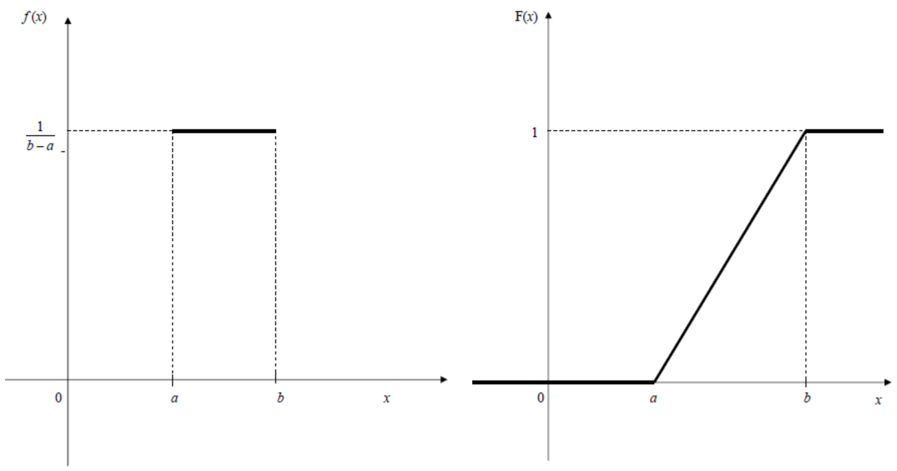
- Une v.a. continue X suit une loi uniforme si sa densité de probabilité est donnée par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{si } x > b \end{cases}$$

Loi uniforme:



Loi uniforme:

- L'espérance d'une v.a. continue $X \sim \mathcal{U}$(a,b) est:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

Loi de probabilité exponentielle:

- Une v.a. X continue suit la loi exponentielle, de paramètre $\lambda>0$, notée $X\sim\varepsilon xp(\lambda)$, si sa densité de probabilité est:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & si \quad x\geq 0\\ 0 & si \quad x<0\end{cases}$$

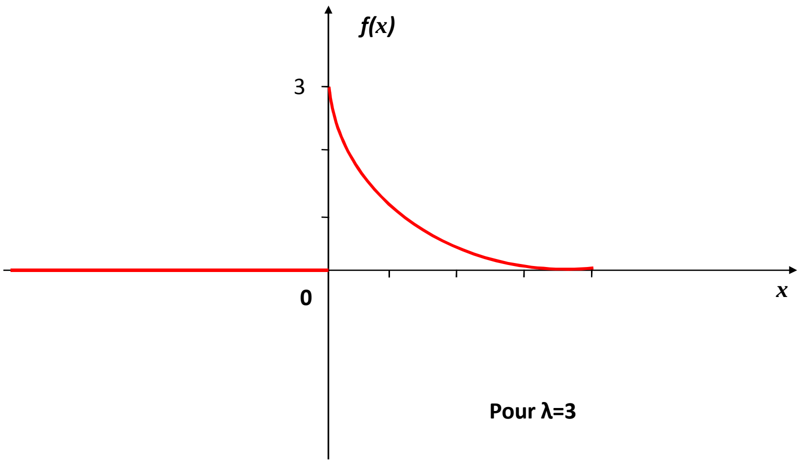
- Alors son espérance mathématique est: $E(X)=1/\lambda$.
- Sa variance sera: $Var(X)=1/\lambda^2$.
- Son écart-type est alors: $\sigma(X)=1/\lambda$

Loi exponentielle:

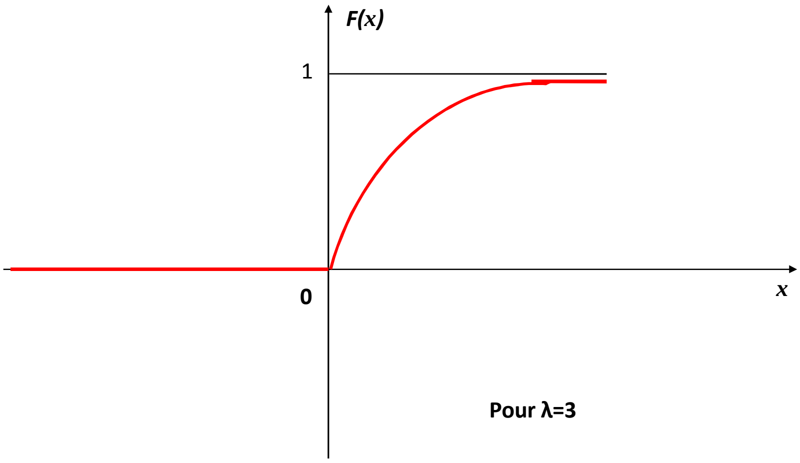
- La fonction de répartition F(x) d'une v.a. X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Représentation graphique de f(x):



Représentation graphique de F(x):



Champs d'application:

- D'abord, on l'applique pour modéliser la demande, en gestion de stock, lorsque la symétrie n'est pas vérifiée et lorsqu'on remarque que son écart-type est égal à son espérance (sa moyenne).
- Mais en général, la loi exponentielle (négative) s'applique pour modéliser les phénomènes de désintégration. La v.a. X est alors la durée de vie du phénomène.

23

Loi Gamma:

- Une v.a. X suit une loi gamma de paramètres α>0 et β>0 si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x} x^{\alpha-1}, & si \;\; x \geq 0 \\ 0, & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

24

Loi Gamma:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi gamma de paramètres α>0 et β>0 est:
$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$$
- En effet, en posant $\beta x = t$, on a:
$$E(X) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^{\alpha} dx = \frac{1}{\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$$
- Sa variance est: $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$

Loi de Weibull:

- Une v.a. X suit une loi de Weibull de paramètres α>0 et β>0 si sa densité est définie par:
$$f(x) = \begin{cases} \alpha \beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}}, & si \ x \geq 0 \\ 0, & si \ x < 0 \end{cases}$$
- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta \alpha x}, & si \ x \geq 0 \\ 0, & si \ x < 0 \end{cases}$$

Loi de Weibull:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Weibull de paramètres α>0 et β>0 est:

$$E(X)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$$

- En effet, en posant $\beta x=t$, on démontre, comme on a vu pour la loi gamma, le résultat.
- Sa variance est:

$$Var(X)=\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}$$

27

Loi de Pareto:

- Une v.a. X suit une loi de Pareto de paramètre α si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{c_0}\left(\frac{c_0}{x}\right)^{\alpha+1} & ;\ \text{si } c_0 \le x\\ 0; & \text{sinon}\end{cases}$$

- Son espérance mathématique pour α>1:

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha-1}c_0$$

- Sa variance (existe pour α>2):

$$Var(X)=\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}c_0$$

28

Loi Bêta:

- Une v.a. X suit une loi bêta de paramètre α et β si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}; & \text{si } \; 0 \le x \le 1 \\ 0 \quad ; & \text{sinon} \end{cases}$$

où α et β sont des constantes positives et $B(\alpha, \beta)$ est la fonction bêta d'Euler:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt \; ; \quad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

29

Loi Bêta:

- L'espérance d'une v.a. X suit une loi bêta de paramètre α et β est: $E(X) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- En effet,

$$E(X) = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

30

Loi de Cauchy:

- Une v.a. X suit une loi de Cauchy de paramètres α et λ>0 si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\alpha)^2} \quad , \quad x\in]-\infty,+\infty[$$

- La fonction de répartition $F(x)$ de X est:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Arc\,tg\,\frac{x-\alpha}{\lambda}$$

31

Loi Normale:

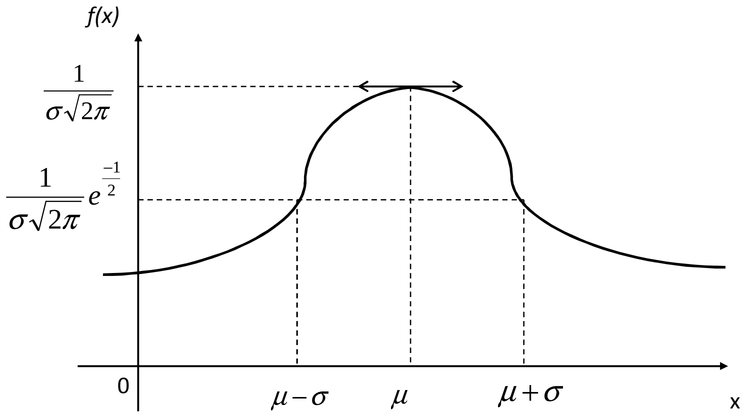
- Une v.a. continue X suit une loi normale de paramètres μ et σ>0 si sa densité de probabilité est:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \; ; \; x\in]-\infty,+\infty[$$

- On note X~$N(\mu,\sigma)$.
- La loi normale est encore connue sous le nom de loi de Gauss ou de Laplace-Gauss.

Prof. Mohamed El Merouani 32

Représentation graphique de N(μ,σ):



Loi Normale:

- La fonction de répartition de X est définie par:

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt$$

- On peut montrer que:

$$E(X)=\mu$$

et

$$Var(X)=\sigma^2$$

Loi Normale centrée, réduite :

- Si X suit une loi normale $N(\mu,\sigma)$, alors la v.a.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

centrée réduite associée à X , suit une loi normale $N(0,1)$, dite loi normale centrée, réduite.

Loi Normale centrée réduite:

- En effet, Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ et $z \in IR$. On a:

$$P(Z \le z) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\right) = P(X \le z\sigma + \mu)$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

- En posant $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t$, on obtient

$$P(Z \le z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

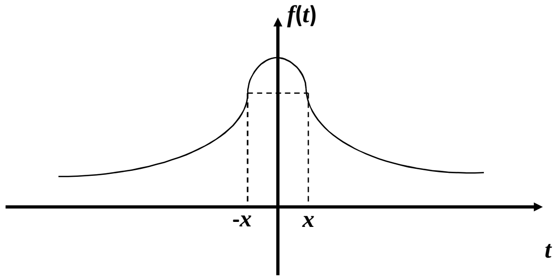
Loi Normale centrée réduite:

Z est donc une v.a. continue dont la densité de probabilité est définie par:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t \in IR$$

C'est-à-dire $Z \sim N(0,1)$.

Allure et propriété de la loi normale réduite:



C'est une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car elle est paire $f(-x)=f(x)$

Ainsi les tables de la loi normale centrée réduite, donnent les valeurs de la fonction $f(t)$ uniquement pour des valeurs positives de la variable t.

La probabilité pour que T $\sim N(0,1)$ prenne une valeur de l'intervalle (t_1,t_2)

- S'écrit alors:

$$P(t_1 < T < t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

39

Propriétés:

- On démontre que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

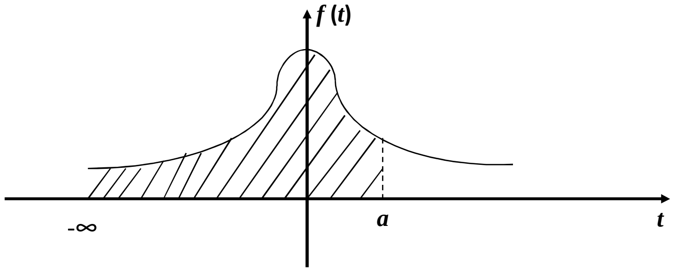
- L'aire comprise entre la courbe $N(0,1)$ et l'axe des t est égale à l'unité.

Prof. Mohamed El Merouani 40

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite:

- On définit la fonction de répartition Φ(t) de la loi normale centrée réduite, comme:

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$



41

Loi Normale centrée réduite:

- On peut ramener tout calcul sur la fonction de répartition d'une v.a. normale $N(\mu,\sigma)$ à un calcul sur la fonction de répartition, notée $\Phi(x)$, d'une v.a. normale $N(0,1)$.
- En effet, si $X \sim N(\mu,\sigma)$,

$$P(X \le a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Prof. Mohamed El Merouani 42

Loi Normale centrée réduite:

- Soit Φ la fonction de répartition de $X \sim N(0,1)$. On a: $\Phi(a)=1-\Phi(-a)$.
- En effet, comme

$$\Phi(-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

et

$$\Phi(a)+\Phi(-a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$$

Exemple:

La taille d'un groupe de 2000 personnes obéit à une loi normale N(170 cm, 5 cm).

On demande de déterminer:

1. Le nombre de personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.
2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm.

Solution:

1. Définissons la variable centrée réduite T à partir de la variable aléatoire X:

$$T = \frac{X - 170}{5}$$

- Alors P(168<X<175)=P(-0,4≤t≤+1)=
=Φ(1)- Φ(-0,4)= Φ(1)-(1- Φ(0,4))=
=Φ(1)+ Φ(0,4)-1

Soit, en cherchant les valeurs de Φ(1) et de Φ(0,4) dans la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée réduite: croisement de la ligne 1,0 et de la colonne 0,00; croisement de la ligne 0,4 et de la colonne 0,00.

D'où P(168≤X≤175)=0,8413+0,6554-1=0,4967

Il y a donc: 2000x0, 4967≈993personnes dont la taille est comprise entre 168cm et 175cm.

2. La probabilité pour qu'une personne ait une taille supérieure à 180cm est:

   P(X>180)=P(T>2)=1- Φ(2)=1-0,9772=0,0228 soit une probabilité de 2,3%.

   Il y a alors vraisemblablement 2000x0,0228≈45personnes dont la taille dépasse 180cm.

Loi Log-normale bi-paramètrique:

- Une variable aléatoire X est dite suivant une loi de probabilité Log-normale de paramètres μ et σ si la v. a. Y=Log X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.
- On note $X \sim \Lambda(\mu, \sigma)$
- Alors, la densité de probabilité de Y est:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- et celle de X sera:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(Log\, x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ; \quad x > 0$$

Espérance et variance:

- Soit $X \sim \Lambda(\mu, \sigma)$, son espérance est:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

- Et sa variance est:

$$Var(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)\{\exp(\sigma^2) - 1\}$$

Loi Log-normale tri-paramètrique:

- Une variable aléatoire X qui peut prendre une valeur qui dépasse une valeur fixée τ est dite suivant une loi log-normale de trois paramètres τ, μ et σ si Y=Log(X-τ) suit une loi normale de paramètres μ et σ.
- On note $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$
- Le troisième paramètre τ s'appelle le seuil.
- Ainsi, la log-normale de 2 paramètres est un cas particulier de celle de 3 paramètres avec τ=0.

Fonction de densité de probabilité:

- Soit $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$, alors sa fonction de densité de probabilité est:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-\tau)} \exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2} \{Log(x-\tau)-\mu\}^2 \right] & si \ \tau < x < \infty \\ 0 & si \ x \leq \tau \end{cases}$$

Espérance et variance:

- Soit $X \sim \Lambda(\tau, \mu, \sigma)$, alors,
- Son espérance est:

$$E(X) = \tau + \exp(\mu + \sigma)$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = e^{\mu^2}\left[e^{\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)\right]$$

Loi du Khi-deux:

- Une v.a. X suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté (ddl en abrégé) si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}; & si\, x > 0 \\ 0; & si\, x \leq 0 \end{cases}$$

- On note $X \sim \chi^2(n)$
- Si $\dfrac{n}{2} = \alpha$ et $\dfrac{1}{2} = \beta$, on retrouve la loi Gamma.

Loi du Khi-deux:

- On peut montrer que:

  Si X_1, X_2,…, X_n sont n v.a. indépendantes qui suivent respectivement des lois normales $N(\mu_1,\sigma_1)$, $N(\mu_2,\sigma_2)$, …, $N(\mu_n,\sigma_n)$, alors la v.a.

  $$Z = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2$$ suit une loi de $\chi^2(n)$ khi-deux

  à n degrés de liberté

Loi du Khi-deux:

- C’est-à-dire:

  Si Z_1, Z_2,…, Z_n sont n v.a. indépendantes qui suivent respectivement des lois normales centrées réduites $N(0,1)$ alors la v.a.

  $$Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$ suit une loi de $\chi^2(n)$ khi-deux

  à n degrés de liberté

Loi du Khi-deux:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi du khi-deux à n degrés de liberté est: $E(X)=n$
- Sa variance est: $Var(X)=2n$

Loi de Student:

- Une v.a. X suit une loi de Student à n degrés de liberté si sa densité de probabilités est définie par:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{1}{2},\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}};\quad x\in IR$$

- On note $X\sim T(n)$
- Pour n=1, on retrouve la loi de Cauchy et on a:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\quad et\quad f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)};\ x\in IR$$

Loi de Student:

- On peut montrer que:
  Si X est une v.a. normale centrée réduite $N(0,1)$, si Y est une v.a. de $\chi^2(n)$ khi-deux à n degrés de liberté, et si X et Y sont indépendantes, alors la v.a.

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

suit une loi $T(n)$ de Student à n degrés de liberté

Loi de Student:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Student à n degrés de liberté est: $E(X)=0$

- Sa variance est: $Var(X) = \frac{n}{n-2}$

Loi de Fisher-Snédecor:

- Une v.a. X suit une loi de Fisher-Snédecor à p et q degrés de liberté si sa densité de probabilité est définie par:

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{p}{2},\frac{q}{2}\right)} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{2}} x^{\frac{p}{2}-1}}{\left(1+\frac{p}{q}x\right)^{\frac{p+q}{2}}}; \qquad x \geq 0$$

- On note $X \sim F(p,q)$

Loi de Fisher-Snédecor:

- On peut montrer que:

Si X_1 *et* X_2 sont deux v.a. indépendantes distribuées respectivement suivant une loi de Khi-deux χ^2 à n_1 et n_2 degrès de liberté, alors la v.a.

$$F = \frac{\frac{1}{n_1} X_1}{\frac{1}{n_2} X_2}$$

suit une loi de Fisher-Snédecor $F(n_1, n_2)$ à n_1 et n_2 degrès de liberté

Loi de Fisher-Snédecor:

- L'espérance mathématique d'une v.a. X qui suit une loi de Fisher-Snédecor $F(p,q)$ à p et q degrés de liberté est:

$$E(X) = \frac{q}{q-2}, \quad (q > 2)$$

- Sa variance est:

$$Var(X) = \frac{2q^2(p+q-2)}{p(q-2)^2(q-4)}, \quad (q > 4)$$