Université Abdelmalek Essaâdi
ENSA de Tétouan

Année universitaire : 2013/2014
1ère année de cycle ingénieur

Contrôle Continu N°1
de Probabilités et Statistiques
Durée : 2 heures

Exercice 1 : (4 points)

Soient trois urnes d'aspect extérieur identique. La première contient a boules blanches et b noires ; la deuxième, c boules blanches et d noires ; la troisième ne contient que des boules blanches. Une personne s'approche au hasard de l'une des urnes et en tire, successivement et sans remise, deux boules.

1°) Trouver la probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches.

2°) Sachant que les deux boules tirées sont blanches, calculer la probabilité qu'elles proviennent de la première urne.

Exercice 2 : (3 points)

Soient a et b deux nombres réels. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y=aX+b$. (discuter suivant les valeurs du réel a).

Exercice 3 : (5 points)

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité de probabilité :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & si\ |x|\leq k \\ 0 & si\ |x|>k>0 \end{cases}$$

1°) Trouver la constante k. Dans la suite de l'exercice, on prend pour k la valeur trouvée.

2°) Calculer l'espérance mathématique de X.

3°) Déterminer F la fonction de répartition de X.

4°) Déterminer la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $Y=X^2$ et calculer $E(Y)$.

Exercice 4 : (3 points)

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & si\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0 & si\ x\notin\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Donner la densité de probabilité $h(y)$ de la variable aléatoire continue $Y=\sin X$.

Exercice 5 : (5 points)

Soit un couple de variables aléatoires continues (X,Y). La variable aléatoire X a pour densité de probabilité marginale où λ est un paramètre réel.

$$f_1(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La variable aléatoire Y admet une fonction de densité conditionnelle par la valeur donnée de $X=x>0$: $f_2(y/x)=xe^{-xy}$ pour $y>0$.

1°) Donner la fonction de densité conjointe $f(x,y)$ du couple (X,Y).

2°) Trouver la fonction de densité marginale $f_2(y)$ de la v.a. Y.

3°) Trouver la densité conditionnelle $f_1(x/y)$.

Bonne chance !

2013/2014 ENSA-Tétouan

1ère Année cycle d'ingénieurs

Correction de CC_1 Probabilités et statistiques

Exercice 1:

Soient les événements

$U_i = \{$le tirage se fait dans l'urne $i\}$; $i = 1, 2, 3$

et $B = \{$les 2 boules tirées sont blanches$\}$

1°) D'après la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B/U_i) . P(U_i)$$

$$P(B) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{(a+b)-1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{c}{c+d} \cdot \frac{c-1}{(c+d)-1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)} + 1\right] *$$

2°) D'après le théorème de BAYES :

$$P(U_1/B) = \frac{P(B/U_1) . P(U_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B/U_i) . P(U_i)} = \frac{1/3\, P(B/U_1)}{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} P(B/U_i)}$$

$$P(U_1/B) = \frac{\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}}{\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)} + 1}$$

---

* Si on a utilisé les combinaisons pour calculer les probabilités, par exemple, $P(B/U_1) = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}} = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2} = \frac{\frac{a!}{2!(a-2)!}}{\frac{(a+b)!}{2!(a+b-2)!}}$

$P(B/U_1) = \frac{a!\ (a+b-2)!}{(a-2)!\ (a+b)!} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$. De même pour $P(B/U_2)$

Exercice 2 :

$\underline{a=0}$; $F_Y(y) = P(Y \leq y) = H_b(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < b \\ 1 & \text{si } y \geq b \end{cases}$

$\underline{a>0}$; $F_Y(y) = P(aX+b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$

$\underline{a<0}$; $F_Y(y) = P(aX+b \leq y) = P\left(X \geq \frac{y-b}{a}\right)$

$= 1 - P\left(X < \frac{y-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{y-b}{a} - 0\right)$

Exercice 3 :

1°) $f(x) = x+1 \geq 0 \iff x \geq -1 \implies k < 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-k}^{k} (1+x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-k}^{k} \iff k = \frac{1}{2}$$

2°) $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} x(x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

3°)

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{8} & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

4°) $H(y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$

$= \frac{(\sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{y} + \frac{3}{8} - \left[\frac{(-\sqrt{y})^2}{2} - \sqrt{y} + \frac{3}{8}\right] = 2\sqrt{y}$

$\underline{\text{si } 0 < y \leq \frac{1}{4}}$

Ainsi

$$H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0 \\ 2\sqrt{y} & \text{si } 0 < y \leq 1/4 \\ 1 & \text{si } y > \frac{1}{4} \end{cases}$$

d'où $\quad h(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin]0, \frac{1}{4}[\\ \frac{1}{\sqrt{y}} & \text{si } y \in]0, \frac{1}{4}[\end{cases}$

Alors $\quad E(Y) = \int_0^{1/4} y\, h(y)\, dy = \int_0^{1/4} \sqrt{y}\, dy = \frac{1}{12}.$

Exercice 4:

Dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $g(x) = \sin x$ est continue, dérivable et sa dérivée garde un signe constant pour tout x

on a $\quad g'(x) = \cos x > 0 \quad$ pour tout $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Donc, les conditions d'application de la formule

$$h(y) = f\left(g^{-1}(y)\right) \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right| \quad \text{où } h \text{ est la}$$

densité de probabilité de $Y = \sin X$, sont satisfaites.

La fonction inverse $g^{-1}(y) = \text{Arc}\sin y$ est aussi dérivable de dérivée $\left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \left|\left(g^{-1}(y)\right)'\right|$; d'où

$$h(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad \text{pour } y \in]-1, 1[$$

Finalement

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} & \text{si } y \in]-1, 1[\\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exercice 5 :

On a : $f_1(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

et $f_2(y/X=x) = x e^{-xy}$ pour $y > 0$

1°) on a : $f_2(y/x) = \dfrac{f(x,y)}{f_1(x)}$; donc $f(x,y) = f_2(y/x) \cdot f_1(x)$

d'où $f(x,y) = \begin{cases} \lambda x e^{-x(\lambda+y)} & \text{si } x>0 \text{ et } y>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } y \leq 0 \end{cases}$

2°) on a :

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(\lambda+y)^2} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \leq 0 \end{cases}$$

En effet ; $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-x(\lambda+y)}\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-x(\lambda+y)}\,dx$

$$\overset{\text{par parties}}{=} \frac{-\lambda}{(\lambda+y)^2}\left[e^{-x(\lambda+y)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{(\lambda+y)^2}$$

3°) Pour $y > 0$

$$f_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} x(\lambda+y)^2 e^{-x(\lambda+y)} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

%