Approximations des lois

Approximations des lois:

- Approximation d'une loi **hypergéométrique** par une la loi **binomiale**
- Approximation de la loi **binomiale** par la loi de **Poisson**
- Approximation de la loi **binomiale** par la loi **normale**
- Approximation de la loi de **Poisson** par la **normale**

Tendance de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale:

- Soit X ~ $H(n,a,b)$, alors $P(X=k)=\dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$

Si $N=a+b \to \infty$, alors $H(n,a,b) \to B\left(n,\dfrac{a}{N}\right)$

- $X \sim B(n,p) \Longrightarrow P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- *En pratique, cette approximation est vraie dès que* $\dfrac{n}{N} < 0{,}1$

Approximations de la loi binomiale

Il existe deux approximations possibles de la loi binomiale:

1. Approximation par la loi de Poisson
2. Approximation par la loi normale

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson:

Si les conditions suivantes pour n et p sont réalisées:

- n est grand ($n \geq 50$),
- p est voisin de 0 ($p<0,1$),

C'est-à-dire dans le cas de la réalisation d'événements rares, la loi binomiale $B(n,p)$ peut-être approximée par une loi de Poisson $P(\lambda)$:

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

dont le paramètre λ est défini par: $\boxed{\lambda=np.}$

Exemple:

- La probabilité pour qu'une machine produise une pièce défectueuse est égale à 0,01. La machine a produit 300 pièces. Donner la probabilité de reconnaître 2 pièces défectueuses dans cette production.

- Soit X « le nombre de pièces défectueuses parmi les 300 pièces ».
- On peut dire que X suit une $B(300; 0,01)$.

- La probabilité recherchée est égale à:

$$P(X = 2) = C_{300}^{2}(0{,}01)^{2}(0{,}99)^{298} = 0{,}2244$$

- Puisque la probabilité p est inférieure à 0,1 et $n>50$, on peut approcher la loi binomiale $B(300;\ 0{,}01)$ par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 300 \times 0{,}01 = 3$

  et écrire $X \sim P(3)$ et poser finalement:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} = \frac{0{,}0498 \times 9}{2!} = 0{,}2241$$

- Cet exemple a été donné pour permettre uniquement la comparaison. Mais, il ne montre pas la nécessité d'un recours aux approximations.
- Supposons maintenant que nous cherchons la probabilité d'avoir 10 pièces défectueuses parmi les 300 pièces.
- Le résultat exact serait de calculer

$$P(X = 10) = C_{300}^{10}(0{,}01)^{10}(0{,}99)^{290}$$

  qui est difficile à calculer.

- Nous sommes amenés dans ce cas à rapprocher ce résultat du résultat donné par une loi de Poisson de paramètre 3 et de calculer

$$P(X=10)=\frac{e^{-3}3^{10}}{10!}=0{,}0008$$

Approximation de la loi binomiale par la loi normale:

Si les conditions suivantes pour n et p sont réalisées:

- n est grand (≥20)
- p et q ne sont pas trop petites (pratiquement $npq \geq 3$)

La loi binômiale $B(n,p)$ peut être approximée par une loi normale $N\left(\mu=np, \sigma=\sqrt{npq}\right)$

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{npq}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2\right\}$$

- La quantité $t=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ suit une loi normale centrée réduite.

Exemple:

- Étudions la probabilité d'obtenir 5 fois pile en 20 parties de pile ou face:
  – Par la loi binomiale
  – Par son approximation par la loi normale.
- La probabilité d'obtenir 5 piles en 20 coups est:

$$P(X=5)=C_{20}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}=\frac{20!}{5!15!}.\frac{1}{2^5}.\frac{1}{2^{15}}=15504\times 0{,}03125\times 0{,}0000305$$

$$P(X=5)\approx 1{,}48\%$$

- Cette loi binomiale est approximée par la loi normale:

$$P(X=5)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{5-(20\times\frac{1}{2})}{\sqrt{20\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}\right)^2}$$

$$P(X=5)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-5}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}\times 5\right)}=\frac{1}{\sqrt{10\pi}}e^{-25}$$

$$=0{,}17841\times 0{,}08208$$

$$P(X=5)=1{,}46\%$$

- On voit sur cet exemple, que pour *n*=20, l'approximation est très bonne.

Approximation de la loi de Poisson par la loi normale:

Soit une v.a. qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Si $\boxed{\lambda \geq 15,}$ alors cette loi de Poisson $P(\lambda)$ peut être approximée par une loi normale $N(\lambda, \sqrt{\lambda})$

Alors, la variable $T = \dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ suit une normale centrée, réduite $N(0,1)$.

Exemple:

- Une usine fabrique 400 lampes électriques à l'heure. On admet que le nombre X de lampes défectueuses produites en une heure suit une loi de Poisson de paramètre λ.

1. On suppose que λ=15. Calculer $P(X>15)$.
2. Calculer cette même probabilité par son approximation par la loi normale.

1. X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Donc

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

λ=15 $\Rightarrow P(X=k)=\frac{e^{-15}(15)^k}{k!}$

$$P(X>15)=\sum_{k=16}^{400}\frac{e^{-15}.(15)^k}{k!}=1-P(0\leq X\leq 15)=1-\sum_{k=0}^{15}\frac{e^{-15}.(15)^k}{k!}$$

- La table de la loi de Poisson nous donne

$$\sum_{k=0}^{15}\frac{e^{-15}.(15)^k}{k!}\approx 0{,}568$$

D'où

$$P(X>15)\approx 0{,}432$$

15

2. $P(X>15)=1-P(X\leq 15)$

$$=1-P\left(\frac{X-15}{\sqrt{15}}\leq\frac{15-15}{\sqrt{15}}\right)$$

Car, comme X~$\mathscr{P}$(15) alors on peut l'approximer par une loi normale N(15, √15). Donc,

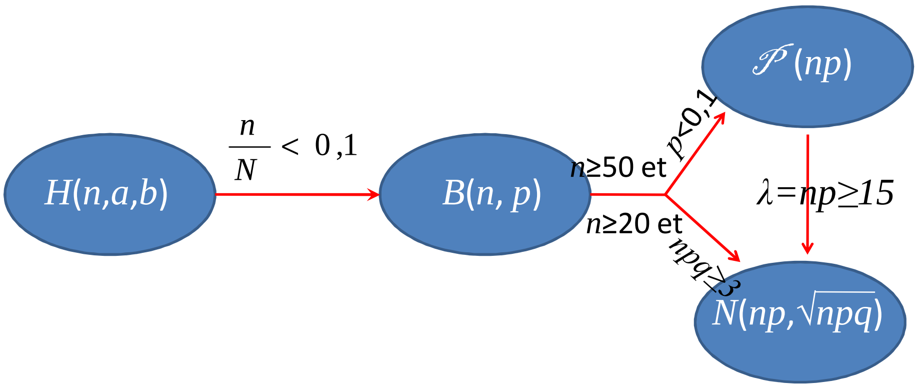
$$P(X>15)=1-P(T\leq 0)=1-\Phi(0)$$

où Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. D'après la table de la loi normale centrée réduite, on Φ(0)=0,5.

D'où, $P(X>15)=1-0{,}5=0{,}5$

16

Résumé des approximations des lois:



Convergences stochastiques

Convergences stochastiques:

- Convergence en probabilité
- Convergence en loi
- Convergence en moyenne d’ordre k
- Convergence presque sûre
- Loi faible des grands nombres
- Théorème de la limite centrale

Convergence en probabilité:

- On dit qu’une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge en **probabilité** vers une variable aléatoire X si:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$$

- On écrit alors $X_n \xrightarrow{P} X$

Convergence en loi:

- On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ de fonctions de répartition F_n converge en **loi** vers une variable aléatoire X de fonction répartition F si la suite $(F_n)_n$ converge vers la fonction F en tout point x.
- Ou encore: $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ en tout point $x \in IR$, sauf aux points de discontinuités de F.
- On écrit alors $X_n \xrightarrow{L} X$, et on parle aussi de convergence faible.

Convergence en moyenne d'ordre k:

- On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge en **moyenne d'ordre k** une variable aléatoire X si:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(|X_n - X|^k\right) = 0$$

- Si k=2, on dit « convergence en moyenne quadratique ».

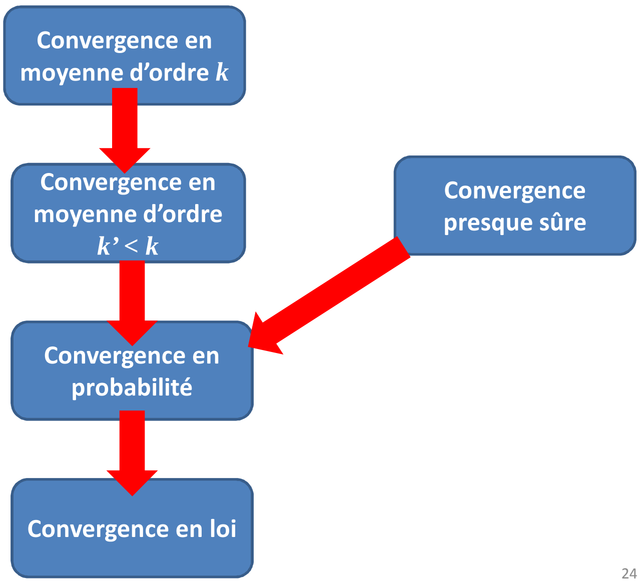
Convergence presque sûre:

- On dit qu'une suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge **presque sûrement** une variable aléatoire X si:

$$P\left(\underset{n\to\infty}{Lim}(X_n - X) = 0 \right) = 1$$

- On écrit alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$

Hiérarchie des différents mode de convergence:



Loi faible des grands nombres:

Théorème 1:

Soit une suite de n expériences de Bernoulli et soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès au cours de ces n expériences. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ on a } \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1$$

où p est la probabilité de succès.

Démonstration du théorème 1:

- On sait que $X \sim B(n,p)$

  Donc $E(X)=np$ et $Var(X)=np(1-p)$.

- Soit la variable $f = \frac{X}{n}$. On a $E(f)=p$

  et $Var(f) = \frac{p(1-p)}{n}$

- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a: $P(|f - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$

Démonstration du théorème 1 (suite):

- La quantité $p(1\text{-}p)$ est maximale en p=1/2 et elle est égale à 1/4; donc

$$P(|f-p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

ou $$P(|f-p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

- Par conséquent:

$$P(|f-p| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

■

Loi faible des grands nombres:

Théorème 2:

Soit une suite de $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi avec $E(X_i)=\mu$ et $Var(X_i)=\sigma^2$, (i=1,2,…). Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1$$

où $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Démonstration du théorème 2:

- Soit $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, on a $E(S_n)=n\mu$ et $Var(S_n)=n\sigma^2$.
- Soit la variable $f = \frac{S_n}{n}$. $E(f)=\mu$ et $Var(f)=\frac{\sigma^2}{n}$
- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a: $$P(|f-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$ ou $$P(|f-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

et donc $$P(|f-\mu|<\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \blacksquare$$

Théorème de la limite centrale:

- Soit une suite de $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi avec $E(X_i)=\mu$ et $Var(X_i)=\sigma^2$, (i=1,2,…). Alors, lorsque $n\to\infty$, $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ où $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ tend vers la loi normale $N(0,1)$, c'est-à-dire: $$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \Phi(x)$$ où Φ est la fonction de répartition de $N(0,1)$.

Exemple:

- On jette 15 fois une pièce de monnaie. Trouver la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 6 et 11.
- En notant par X la v.a. égale au nombre de faces obtenu au cours des 15 jets, l'utilisation de la loi binomiale donne:

$$P(6 \leq X \leq 11) = \sum_{k=6}^{11} C_{15}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{15-k} = 0{,}8315 \cong 0{,}83$$

- On peut résoudre ce problème en utilisant une approximation de la loi binomiale par une loi normale.
- On sait que la loi binomiale est discrète alors que la loi normale est continue! Donc, si on suppose que la variable est continue, il faut tenir compte du fait que (X=3) devient (2,5≤X<3,5) et, par suite, dans ce problème, on doit chercher P(5,5≤X<11,5).
- La v.a. X suit une loi binomiale; elle peut donc être considérée comme la somme de n=15 v.a. suivant toutes une loi de Bernoulli de même paramètre p. On a donc:

$X=X_1+X_2+\ldots+X_{15}$, et en posant $X=S_{15}$, avec

$n\mu=np=15\frac{1}{2}$ =7,5 et $\sigma\sqrt{n}=\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}=\sqrt{\frac{11}{22}}\sqrt{15}=1{,}94$

(car $E(X_i)$=p et Var(X_i)=p(1-p)), on obtient:

$$P(5{,}5\leq X<11{,}5)=P\left(\frac{5{,}5-7{,}5}{1{,}94}\leq\frac{S_n-7{,}5}{1{,}94}<\frac{11{,}5-7{,}5}{1{,}94}\right)$$

$$=\Phi(2{,}06)-\Phi(-1{,}03)$$

$$=\Phi(2{,}06)+\Phi(1{,}03)-1$$

$$=0{,}9803+0{,}8485-1=0{,}8288$$

$$\cong 0{,}83$$

Théorème de la limite centrale: Cas particuliers

a) Si $X\sim B(n,p)$, alors

$$\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\xrightarrow[n\to\infty]{L}Z; \qquad \text{où } Z\sim N(0,1)$$

b) Si $X\sim\mathscr{P}(\lambda)$, alors

$$\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\xrightarrow[n\to\infty]{L}Z; \qquad \text{où } Z\sim N(0,1)$$

Démonstrations:

- Le premier résultat (a) s'appelle « théorème de De Moivre-Laplace ».
- La preuve de (a) et de (b) résulte du théorème de la limite centrale et de la propriété d'additivité des lois binomiale et de Poisson (une somme des lois binomiales est une binomiale et, de même, la somme des lois de Poisson est une loi de Poisson dont les paramètres sont les sommes des paramètres des lois que l'on somme).